Calcul des classes

1 Préliminaires

La logique des propositions ne prend en considération que les inférences dont la validité repose sur les propriétés des connecteurs (indiquées par leur table de vérité). On se contente d'admettre qu'une proposition élémentaire est soit vraie, soit fausse, le tiers étant exclu. Il est clair cependant qu'il y a des inférences dont la validité ne repose pas seulement sur les propriétés des connecteurs, mais également sur la "structure" interne des propositions élémentaires ; on a vu, par ex., que les syllogismes d'Aristote étaient dans ce cas (voir les "Rudiments de logique propositionnelle", p. 3-5).

On a vu qu'Aristote admettait que toute proposition (élémentaire) s'analysait sous la forme : S est P, à quoi se surajoutait l'indication de la quantité (universel / particulier) et de la qualité (affirmatif / négatif). Dans la perspective aristotélicienne, il faut donc tout d'abord former (en général "par abstraction" à partir des "substances premières") les *termes* (généraux) qui entrent dans un "jugement ;" et ce n'est qu'ensuite que l'on pourra les combiner par la copule ("est" / "sont") pour former un jugement. Il y a derrière cela beaucoup de préjugés et de parti-pris qui ont suscité d'innombrables discussions au long des siècles. Il résulte, en particulier de l'analyse d'Aristote que l'on ne peut justifier de manière satisfaisante les inférences dont les prémisses ou la conclusion comportent des expressions signifiant des *relations* ; ce qui interdit, par ex., de justifier "logiquement" la plupart des raisonnements que l'on trouve en mathématiques, mais aussi des raisonnements aussi simples que le célèbre exemple de Jungius (au dix-septième siècle), repris par de Morgan : tout cercle est une figure, *ergo* tous ceux qui tracent des cercles, tracent des figures.

La logique contemporaine renverse cette perspective : au lieu de partir des "termes", elle part des propositions entières et les analyse de sorte à faire apparaître des constituants disymétriques. Les propositions dont on part sont du genre : "Brutus est l'assassin de César", "Paris est au nord-est de Nantes", "la Lune brille". Ce sont donc des propositions qui comportent des *noms propres* (ou des termes singuliers, mais cela pose quelques problèmes que l'on n'envisagera pas ici) dont on admet qu'ils nomment des "objets" [1].

On peut analyser ce genre de proposition de plusieurs manières différentes : on peut considérer que "Brutus est l'assassin de César" est formé à partir de l'expression "...est l'assassin de César" en mettant à la place des trois petits points le nom propre "Brutus" ; ou bien, à partir de l'expression "Brutus est l'assassin de..." en mettant à la place des trois petits points le nom propre "César" ; ou encore, à partir de l'expression "... est l'assassin de $_{***}$" en mettant les noms propres "Brutus"

1. Les notions d'"objet" et de "nom propre" sont prises ici comme des notions logiquement primitives : un objet est ce qui peut être nommé par un nom propre, un nom propre est ce qui nomme un objet. On admettra, par ex., qu'une galaxie est un objet au même titre qu'une étoile, un ver de terre ou la tour Eiffel.

et "César" à la place des trois petits points et des trois petites astérisques respectivement [2].

On fait ainsi apparaître, ce que Frege appelait une partie constante "...est l'assassin de César" ou "... est l'assassin de $_{***}$" et une ou des parties variables, "Brutus", ou "Brutus" et "César", car on peut imaginer qu'à la place de "Brutus ou de "Brutus" et de "César", se trouvent d'autres noms propres. Ainsi, par ex., à la place de "Brutus" dans la première analyse, on pourrait insérer les noms propres "Cassius" ou "Pompée" ou tout autre nom propre que l'on veut.

A la suite de Russell, on appelle "fonction propositionnelle" la partie constante ; une fonction propositionnelle peut avoir une, deux ou plus de deux "places d'argument" : "Brutus est l'assassin de..." est une fonction propositionnelle à une place d'argument, "... est l'assassin de $_{***}$", une fonction propositionnelle à deux places d'argument, etc. Pour plus de simplicité, on peut remplacer les trois petits points ou les trois petites astérisques dans une fonction propositionnelle par des "variables", x, y, z, etc. Nos trois fonctions propositionnelles s'écrivent alors : "x est l'assassin de César", "Brutus est l'assassin de x", "x est l'assassin de y". Sans qu'il soit besoin d'entrer dans plus détails, on remarque qu'une fonction propositionnelle à une place d'argument exprime quelque chose qui ressemble à une *propriété d'objet*, mais évidement en un sens très large de "propriété" qui va au delà de ce que l'on entend habituellement par là et qui s'exprime dans le langage naturel par des substantifs comme "étudiant" ("Alfred est un étudiant"), "chat", "étoile", etc., ou bien par des adjectifs comme "courageux" ("Brutus est courageux"), "beau", "rabougri", etc. En particulier, ce que la tradition aristotélicienne appelle un "terme général" exprime une propriété [3].

D'un autre côté, une fonction propositionnelle à deux, ou plus de deux places d'arguments exprime ce que l'on entend habituellement par une *relation entre objets* : "être le père de", "assassiner", "jalouser", "préférer" etc. C'est là une des innovations majeures de la logique contemporaine qui permet de justifier la validité d'inférences dont les prémisses et/ou la conclusion mentionnent des relations à deux ou plus de deux places et donc en particulier les inférences que l'on trouve en mathématiques. Ce n'est évidemment pas un hasard si le renouveau de la logique à la fin du XIXème siècle et au début du XXème fut le fait de mathématiciens ou de gens formés aux mathématiques (Frege, Peano, Russell...). Il importe de bien distinguer une propriété d'une relation (à deux places, par ex.) : une propriété peut être "attribuée" significativement à *un* objet : on peut dire "Sirius est une étoile" ou "Médor est un chien", "être une étoile" ou "être un chien" sont donc des propriétés. Par contre il n'y a aucun sens à dire "Sirius est à droite" ou "Médor court plus vite" car il faut nécessairement préciser à droite de quoi est Sirius et plus vite que qui court Médor ; "être à droite" ou "courir plus vite" expriment donc des relations ce qui impose que l'on mentionne *deux* objets [4].

Dans ce qui suit, on ne considérera toutefois que des fonctions propositionnelles à une place d'argument, réservant pour plus tard l'étude des fonctions propositionnelles à plus d'une place d'argument. On notera $P(x)$, ou plus simplement Px une fonction propositionnelle quelconque à une place d'argument, exprimant donc une propriété (ou un "concept"). On appelle P une "lettre de prédicat" [5]. Plus généralement, on utilisera des majuscules P, Q, R, ou A, B, C, etc. comme lettres

2. On peut même admettre que cette proposition est formée à partir de l'expression "Brutus ... César" en mettant à la place des trois petits points une expression pour une relation ; nous n'envisagerons pas ce genre d'analyse ici.

3. A la place de "propriété", on peut parler de "concept" : on peut tout aussi bien dire que "Bucéphale a la propriété d'être un cheval" ou que "Bucéphale tombe sous le concept de "cheval" ", ce qui, en bon français, se dirait : Bucéphale est un cheval.

4. Il faut prendre garde que le langage ordinaire s'autorise parfois à transformer grammaticalement une relation en propriété ; par ex. on peut dire : "Auguste est père", ou "Alfred est amoureux" mais cela n'est qu'une manière abrégée, et logiquement trompeuse, de dire qu'il existe au moins un objet (un enfant) tel que Auguste est père de cet ou de ces enfants, ou qu'il existe au moins un objet (femme ou homme) qu'Alfred aime.

5. On pourrait distinguer parmi les fonctions propositionnelles à une place d'argument, celles, que l'on pourrait

de prédicat. $P(x)$ se lit par ex. : x a la propriété P, ou, plus simplement : x est un P, etc.

Lorsque l'on remplace, dans une fonction propositionnelle (à une place d'argument, nous ne le répéterons pas), la variable par un nom propre, on obtient une proposition qui est vraie ou fausse, le tiers étant exclu. Par ex., si l'on remplace x dans "x est l'assassin de César" par "Cassius" ou par "Brutus", on obtient des propositions vraies, alors que l'on obtient une proposition fausse si on remplace x par "Pompée". On dira en ce cas que Brutus et Cassius (les hommes ainsi nommés) satisfont la fonction propositionnelle en question, mais pas Pompée. Dans ce qui suit, on utilisera les petites lettres du début de l'alphabet a, b, c, etc. pour figurer des noms propres et on écrira, par ex., $P(a)$, ou $P(b)$ qui peuvent se lire "l'objet que nomme a a la propriété P", "l'objet que nomme b a la propriété P", ou plus simplement "a a la propriété P" en prenant a pour son propre nom (usage dit "autonyme") etc. Par opposition au x de $P(x)$ qui est une *variable*, on dira que a dans $P(a)$ est une *constante*.

On peut également vouloir exprimer qu'il existe au moins un "objet" qui satisfait telle ou telle fonction propositionnelle sans avoir besoin de préciser de quels objets il s'agit, par ex. : il existe (au moins) un objet x qui est l'assassin de César ; on notera cela par : $\exists x$(x est l'assassin de César), ou plus généralement, $\exists x P(x)$. "$\exists$" est appelé *quantificateur existentiel*.

De la même façon, on peut également vouloir exprimer qu'une fonction propositionnelle est satisfaite par tout objet ("tout objet est identique à lui-même", par ex.). On notera cela en général par : $\forall x P(x)$, i.e. : quel que soit x, x est P. "$\forall$" est appelé *quantificateur universel*.

Les quantificateurs, existentiel ou universel, sont de nouvelles "constantes logiques" qui s'ajoutent aux connecteurs propositionnels et les notations qui précèdent ("$\exists x P(x)$", "$\forall x P(x)$") peuvent être combinées avec la notation pour les connecteurs propositionnels, par ex. : il existe au moins un x qui est à la fois P et Q s'écrit : $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$, ce qui est la manière contemporaine de formaliser les jugements particuliers affirmatifs (en I) de la tradition. Ou bien encore : quel que soit x, si x est P, alors x est Q, ce qui s'écrit : $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$, ce qui est la manière contemporaine de formaliser les jugements universels affirmatifs (en A) de la tradition.

Pour lire des formules de ce genre, il importe de prendre en considération la *portée* du quantificateur : dans les formules ci-dessus, cela ne pose pas de problème puisque la portée des quantificateur s'étend à toute la formule. Mais dans une formule plus complexe comme : $[\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall y(R(y) \Rightarrow P(y))] \Rightarrow \forall z(R(z) \Rightarrow Q(z))$, la portée du quantificateur en x se limite à la sous-formule $(P(x) \Rightarrow Q(x))$, celle du quantificateur en z à la sous formule $(R(z) \Rightarrow Q(z))$, etc. En simplifiant, on peut dire que la portée d'un quantificateur s'étend jusqu'à la parenthèse qui ferme la première parenthèse ouvrante qui suit le quantificateur.

Rapport entre les quantificateurs

Si l'on affirme que tout est beau, c'est que l'on exclut qu'il existe ne serait-ce qu'un objet qui ne soit pas beau, autrement dit (en symbolisant "x est beau" par "$B(x)$"), on a l'équivalence : $\forall x B(x)$ ssi $\sim\exists x \sim B(x)$ [6].

En général, on admet donc qu'une proposition de la forme $\forall x(\ldots x \ldots)$ n'est fausse que s'il

appeler "élémentaires" et qui correspondraient à peu près aux termes désignant des propriétés dans le langage naturel, comme "chat" étoile" ou "courageux" ; en ce cas on admettrait qu'une lettre de prédicat P vient en place d'une "propriété élémentaire". Cette distinction n'est toutefois pas du ressort de la logique et rien n'interdit dans ce qui suit que par ex. P symbolise une propriété "complexe" comme : "x est un chat peureux".

6. "ssi" est une abréviation pour "si et seulement si".

> *existe* au moins un objet, disons a, tel que $\ldots a \ldots$ est faux. S'il n'existe aucun tel objet, la proposition est vraie. En conséquence, à supposer qu'il n'existe *rien*, toute proposition de cette forme serait vraie.

De la même manière, si l'on affirme qu'il existe au moins un objet beau, c'est que l'on exclut que tout objet soit laid (i.e. non beau), ce qui se symbolise par : $\exists x B(x)$ ssi $\sim\forall x \sim B(x)$.

On peut donc définir l'un par l'autre les deux quantificateurs :

$$\begin{array}{lll} \forall x & =_{df} & \sim\exists x \sim \\ \exists x & =_{df} & \sim\forall x \sim \end{array}$$

De manière plus générale, on voit que si l'on affirme qu'il est faux que tout soit beau, c'est que l'on affirme qu'il existe au moins un objet laid (i.e. non beau) ; si l'on affirme qu'il est faux qu'il existe un objet beau, c'est que l'on affirme que tous les objets sont laids (i.e. non beau), etc. On a donc le tableau suivant qui prolonge le précédent :

$$\begin{array}{lll} \sim\forall x & =_{df} & \exists x \sim \\ \sim\exists x & =_{df} & \forall x \sim \\ \forall x \sim & =_{df} & \sim\exists x \\ \exists x \sim & =_{df} & \sim\forall x \end{array}$$

Fonctions propositionnelles à une place d'argument et classes.

Revenons un petit peu en arrière. On a vu que lorsque l'on remplace, dans une fonction propositionnelle (à une place d'argument), la variable par un nom propre, on obtient une proposition qui est soit vraie, soit fausse, le tiers étant exclu. On peut alors associer à chaque fonction propositionnelle $P(x)$, la *classe* des objets tels que les propositions obtenues en remplaçant x par leur nom soient vraies. Autrement dit, en reprenant le vocabulaire introduit ci-dessus, on peut associer à chaque fonction propositionnelle la classe des objets qui la satisfont. Par ex., à la fonction propositionnelle "x est un chat peureux", on peut associer la classe des objets qui la satisfont, autrement dit la classe des chats (individuels) peureux (!) [7].

7. Les logiciens de Port-Royal distinguaient, à propos des concepts (ou des "termes généraux" ou encore des "idées"), leur "extension" (ou étendue) et leur "compréhension" ; voilà comment ils s'exprimaient au Livre I, chap. vi : "Or dans ces idées universelles, il y a deux choses qu'il est très important de bien distinguer, la *compréhension,* & *l'étendue.* J'appelle *compréhension* de l'idée, les attributs qu'elle enferme en soi, & que l'on ne peut lui ôter sans la détruire, comme la compréhension de l'idée du triangle enferme extension, figure, trois lignes, trois angles, & l'égalité de ces trois angles à deux droits, &c. J'appelle *étendue* de l'idée, les sujets à qui cette idée convient, ce qu'on appelle aussi les inférieurs d'un terme général, qui à leur égard est appelé supérieur, comme l'idée du triangle en général s'étend à toutes les diverses espèces de triangles." Il semble que les gens de Port-Royal admettaient que l'"étendue" d'un terme général comprend tout autant des termes moins généraux mais subordonnés (comme triangle rectangle relativement à triangle) que les "individus" à qui s'applique le terme général (comme tel ou tel triangle particulier relativement à triangle), ce qui n'est là qu'un des effets d'une confusion constante depuis Aristote entre les divers sens du verbe "être" (nous reviendrons sur ce point un peu plus loin). On peut admettre que ce que l'on appelle ici "classe associée à une fonction propositionnelle" est ce que les gens de Port-Royal appelaient l'étendue (ou l'extension) d'un terme général, mais en excluant les termes moins généraux. On retrouve cette même distinction chez Leibniz, par ex. dans les *Nouveaux Essais*, Livre IV, chap xvii, § 8.

En vertu du tiers exclu, un objet quel qu'il soit, appartient ou n'appartient pas à la classe que détermine une fonction propositionnelle puisque, lorsque l'on met son nom à la place de la variable, on obtient une proposition soit vraie, soit fausse, le tiers étant exclu.

> On admettra donc que l'on n'a pas affaire à des concepts (ou propriétés) "vagues", comme celui de "chauve" ou de "tas" (les célèbres "sorites" des anciens). C'est là évidemment un parti pris qui peut sembler déconcertant puisque le langage naturel regorge de tels concepts ; mais le logicien n'a pas à se vouloir fidèle au langage naturel, dont les imperfections logiques sont au contraire à corriger. Ainsi que le disait Frege : "Le travail en logique est, pour une large part, un combat contre les défauts logiques du langage." (*N.S.* p. 272).

On notera la classe déterminée par la propriété $P()$ ou $A()$, par la même lettre en majuscule grasse : $\mathbf{P}$, ou $\mathbf{A}$.

Remarque importante : toute propriété ne détermine pas une classe ; il faut prendre certaines précautions que l'on verra dans une autre vie... Ici, on ne considére que des propriétés *d'objets* (ou "individus") et on admet qu'une classe d'objets n'est pas elle-même une entité de même "niveau logique" que les "objets" au sens où ce que l'on peut dire significativement d'un objet ne peut être dit significativement d'une classe et, réciproquement : ce que l'on peut dire significativement d'une classe, ne peut l'être d'un objet.

Il reste qu'une classe (dont les éléments sont des objets) peut être, à son tour, un élément d'une classe de classes, qui peut elle-même être un élément d'une classe de classes de classes, etc. Une classe dont les éléments sont des objets peut être appelée *classe de 1er niveau*, une classe dont les éléments sont des classes de premier niveau, *classe de 2ème niveau*, etc. La même remarque que précédemment peut être faite concernant ces classes de niveaux différents : si $n \neq m$, ce que l'on peut dire significativement d'une classe de niveau n ne peut être dit significativement d'une classe de niveau m et, réciproquement, ce que l'on peut dire significativement d'une classe de niveau m, ne peut l'être d'une classe de niveau n.

Dans ce qui suit, on ne considérera que des classes de premier niveau, déterminées par des propriétés d'objets et dont les éléments sont donc eux-mêmes des objets : en particulier, la classe nulle et la classe universelle dont on parlera plus bas, sont des classes de premier niveau.

Remarques introductives au Calcul des Classes.

La relation fondamentale du Calcul des Classes est celle d'*appartenance* : un objet a (ou "élément") appartient (ou n'appartient pas) à une classe, le tiers étant exclu, ce que l'on note (a étant un objet (élément) et $\mathbf{A}$, une classe) :

$$a \in \mathbf{A}$$ [8]

On peut définir logiquement cette relation par :

$$x \in \mathbf{A} =_{df} A(x).$$

8. On notera la négation "a n'appartient pas à $\mathbf{A}$" par : $a \notin \mathbf{A}$

ce qui revient à : x appartient à la classe $\mathbf{A}$ ssi x a la propriété A [9].

Conséquences :
- Une même classe peut correspondre à des propriétés ayant des “sens” (= "compréhension") différents. Pour le logicien, ces différences entre propriétés sont négligeables (parti-pris "extensionnaliste").
- Une propriété qui ne vaut que d'un seul objet détermine une classe, et l'on ne doit pas confondre cette classe avec l'unique objet qui lui appartient : la propriété "satellite naturel de la Terre" détermine une classe à laquelle n'appartient qu'un seul élément, à savoir la Lune ; la Lune brille mais pas la classe dont l'unique élément est la Lune (il n'y a même aucun sens à dire d'une classe qu'elle brille ou qu'elle ne brille pas !).
- De la même manière, une propriété qui ne vaut d'aucun objet détermine une classe, la classe nulle (ou vide), que l'on note : $\emptyset$. Exemple : $x \neq x$ ("être différent de soi-même").
- Une propriété qui vaut de tout objet détermine la classe que l'on appelle parfois la classe universelle et que l'on peut noter : V. Exemple : $x = x$ ("être identique à soi-même").

En général, il ne faut pas confondre une classe avec une collection, une totalité, un agrégat, etc. : un mur peut être considéré comme une collection ou un agrégat de briques et il est de même "niveau logique" que les briques dont il est un agrégat : on peut, par ex., dire des briques qu'elles sont rouges, ce que l'on peut également dire significativement du mur. Une classe est une entité *abstraite*, au contraire d'une collection, ou d'un tas.

2 Relations entre classes et opérations sur les classes.

2.1 Inclusion d'une classe dans une autre

L'inclusion d'une classe dans une autre, est notée : $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ (i.e. : la classe $\mathbf{A}$ est incluse dans la classe $\mathbf{B}$).

Définition de l'inclusion :

$$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \text{ ssi } \forall x(x \in \mathbf{A} \Rightarrow x \in \mathbf{B}) \text{ [10]}.$$

Ce que l'on peut paraphraser par : une classe est incluse dans une autre ssi tous les objets qui appartiennent à la première appartiennent également à la seconde.

Propriétés "formelles" de l'inclusion

9. Notons que l'on peut définir directement une classe par la donnée de ses éléments ; si par ex. a, b, et c sont les seuls éléments appartenant à la classe $\mathbf{A}$, on définit $\mathbf{A}$ par : $\mathbf{A} = \{a, b, c\}$ (en écrivant la liste des éléments entre accolades, notation standard). Si l'on ne sait rien d'autres de a, b et c, la propriété correspondant à $\mathbf{A}$ sera tout simplement : "être identique à a, à b ou à c".

10. On se permettra d'utiliser le symbolisme logique habituel pour énoncer les définitions et théorèmes du calcul des classes. Notons que les symboles "$\in$" ou "$\subseteq$" et d'autres que l'on va introduire, n'appartiennent pas au symbolisme logique, même si on peut les définir en termes purement logiques.

– Cette relation est *réflexive*, autrement dit on a, pour toute classe $\mathbf{A}$: $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}$ [11].
– Cette relation est *transitive*, autrement dit on a, pour toute classe, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$: si $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$, alors $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{C}$ [12].
– Cette relation est *antisymétrique*, autrement dit on a, pour toute classe $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$: si $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$, alors $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ [13].

On a donc un critère d'identité pour les classes : deux classes sont identiques ssi elles contiennent *exactement* les même objets.

Il en résulte que $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ ("la classe $\mathbf{A}$ est différente de la classe $\mathbf{B}$") si et seulement ssi il existe au moins un objet a qui appartient à $\mathbf{A}$ mais pas à $\mathbf{B}$, ou qui appartient à $\mathbf{B}$ mais pas à $\mathbf{A}$. L'identité entre classes, comme toute identité, est réflexive, symétrique et transitive. On dit que c'est une relation d'équivalence.

L'inclusion peut se définir logiquement par :

$$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} =_{df} \forall x[A(x) \Rightarrow B(x)]$$

L'identité se définit logiquement par :

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} =_{df} \forall x[A(x) \Leftrightarrow B(x)]$$

– La réflexivité de l'inclusion suit immédiatement puisque l'on a évidemment :
$\forall x[A(x) \Rightarrow A(x)]$
– La transitivité de l'inclusion s'exprime par :
$\{\forall x[A(x) \Rightarrow B(x)] \wedge \forall y[B(y) \Rightarrow C(y)]\} \Rightarrow \forall z[A(z) \Rightarrow C(z)]$

On va démontrer, par l'absurde, que cette formule est "universellement valide" en montrant qu'elle ne peut être fausse.
Supposons que cette implication ne soit pas toujours vraie ; alors l'antécédent de l'implication pourrait être vrai et le conséquent faux, en vertu de la "table" de l'implication. Que le conséquent soit faux signifierait qu'il existe au moins un objet, disons a, tel qu'il soit faux que $A(a) \Rightarrow C(a)$, c'est à dire (en vertu toujours de la "table" de "$\Rightarrow$") :

11. Une propriété d'une relation est dite *formelle* lorsqu'elle peut s'énoncer en termes purement logiques. Nous anticipons un peu ici sur ce que l'on étudiera plus attentivement l'an prochain. On note le fait qu'un objet a entretient une relation R avec un objet b par aRb (attention : s'agissant d'une relation, l'ordre des termes est capital : il ne revient pas au même de dire que a est à gauche de b et que b est à gauche de a) et xRy est la fonction propositionnelle à deux places d'argument correspondante. Dans ce symbolisme on exprime le fait qu'une relation est (totalement) réflexive par : $\forall x\ xRx$. Par ex. la relation "être aussi grand" est clairement réflexive puisque toute chose est aussi grande qu'elle-même.

12. Dans le symbolisme introduit dans la note précédente, on exprime le fait qu'une relation R est transitive par : $\forall x, \forall y, \forall z[(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz]$. Par ex., la relation "être plus grand" est évidemment transitive : si a est plus grand que b qui est plus grand que c, a est plus grand que c.

13. On exprime le fait qu'une relation R est antisymétrique par : $\forall x, \forall y[(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y]$. Par ex., la relation "être plus grand ou égal" est antisymétrique. Le terme "antisymétrie" renvoie à une autre propriété formelle d'une relation, à savoir la *symétrie*, justement ; une relation R est dite symétrique ssi elle satisfait la formule suivante : $\forall x, \forall y(xRy \Rightarrow yRx)$. Par ex., si a est marié avec b, b est marié avec a, et cela quels que soient a et b. Notons que ce n'est que dans le cas des relations symétriques que l'ordre des termes est indifférent et que l'on peut tout aussi bien dire aRb que bRa.

$$\boxed{A(a)\ est\ vrai} \text{ et } \boxed{C(a)\ est\ faux}$$

Mais, puisque l'antécédent "$\forall x[A(x) \Rightarrow B(x)] \wedge \forall y[B(y) \Rightarrow C(y)]$" est supposé vrai, les deux formules $\forall x[A(x) \Rightarrow B(x)]$ et $\forall y[B(y) \Rightarrow C(y)]$ sont vraies (en vertu de la "table" de la conjonction). Puisque $\forall x[A(x) \Rightarrow B(x)]$ est vraie, cela vaut en particulier de a et donc : $A(a) \Rightarrow B(a)$ est vraie, et comme on a déjà trouvé que $A(a)$ est vraie :

$$\boxed{B(a)\ est\ vraie}$$

De la même manière, puisque $\forall y[B(y) \Rightarrow C(y)]$ est vraie, $B(a) \Rightarrow C(a)$ est vraie et donc, puisque $B(a)$ est vraie :

$$\boxed{C(a)\ est\ vraie}$$

ce qui contredit le premier résultat. Ne pouvant être fausse, cette formule est donc "universellement valide" Cqfd.

– L'antisymétrie de l'inclusion s'exprime par :

$\{\forall x[A(x) \Rightarrow B(x)] \wedge \forall y[B(y) \Rightarrow A(y)]\} \Rightarrow \forall z[A(z) \Leftrightarrow B(z)]$
ce qui n'est que la définition de la bi-implication.

2.1.1 Inclusion et jugements en **A** et **O** de la logique classique

L'inclusion de la classe **A** dans la classe **B** correspond au jugement en **A** de la logique classique (affirmatif universel : Tout S est P) ; et la transitivité de l'inclusion que l'on vient de démontrer correspond au syllogisme en *Barbara* que l'on peut transcrire ainsi (**S**, **M** et **P** étant les classes correspondant respectivement au petit terme (sujet de la conclusion), au moyen terme, et au grand terme (prédicat dans la conclusion) :

Formulation habituelle *Barbara*	Transcription dans le symbolisme logique	Transcription en termes de classes
Tous les M sont P	$\forall x(Mx \Rightarrow Px)$	$\mathbf{M} \subseteq \mathbf{P}$
Tous les S sont M	$\forall x(Sx \Rightarrow Mx)$	$\mathbf{S} \subseteq \mathbf{M}$
Tous les S sont P	$\forall x(Sx \Rightarrow Px)$	$\mathbf{S} \subseteq \mathbf{P}$

Que la classe **A** ne soit pas incluse dans la classe **B** se note : $\mathbf{A} \nsubseteq \mathbf{B}$, i.e. : il existe au moins un élément qui appartient à **A** mais qui n'appartient pas à **B**, ce qui correspond au jugement en **O** de la logique classique (particulier négatif : Quelque S n'est pas P).

Import existentiel des jugements en A et E d'Aristote Aristote admet qu'un jugement comme "les dahus sont des bouquetins" est nécessairement faux ; non pas parce qu'il y a des dahus qui ne sont pas des bouquetins, mais, tout simplement, parce qu'il n'existe pas de dahu. En général, cela revient à dire qu'un jugement de la forme : "tout S est P" est faux lorsque le terme sujet est "vide", autrement dit lorsqu'il n'y a rien qui soit S. Si donc l'on pose comme vrai un jugement de cette forme, c'est que l'on présuppose que le terme sujet n'est pas vide : c'est ce l'on appelle traditionnellement l'"import existentiel" des jugements universels, qui justifie les relations de contrariété, subcontrariété et subalternation du "carré des oppositions".

Il n'en est plus de même dans l'analyse contemporaine des jugements universels qui ne les considère pas comme des jugements *catégoriques* (exprimant la relation d'un attribut à un sujet), mais comme des jugements *hypothétiques* (exprimant la relation de "principe" à "conséquence" disait- on parfois : si … alors…) : tout S est P signifie alors : si une chose, quelle qu'elle soit, est S, alors elle est P, autrement dit, comme on l'a vu : $\forall x[S(x) \Rightarrow P(x)]$. Supposons que rien ne soit S ; on ne trouvera alors aucune chose (aucun "objet") qui soit à la fois S et $\sim P$, seule circonstance qui permettrait de dire que l'universelle est fausse. Donc l'universelle ne pouvant être fausse est nécessairement vraie. Pour le dire autrement : puisque rien n'est S, l'antécédent de l'implication est toujours faux, et donc l'implication est toujours vraie.

Il n'en est pas de même pour les jugements particuliers d'Aristote tels qu'ils sont analysés dans la logique contemporaine : "quelque S est P" signifie qu'il *existe* quelque chose qui est à la fois S et P ($\exists x(S(x) \wedge P(x))$). Il en résulte évidemment que la vérité d'une universelle n'entraîne nullement celle de la particulière correspondante puisque l'universelle peut être vraie simplement parce que le terme "sujet" est vide, ce qui rend fausse la particulière : de "pour tout x, si x est un dahu, alors x est un bouquetin", qui est vrai puisqu'il n'y a pas de dahu, ne suit nullement "il existe au moins un x qui est à la fois dahu et bouquetin." qui est faux puisqu'il n'existe pas de dahu et, donc, *a fortiori*, rien qui soit à la fois dahu et bouquetin (pour des détails supplémentaires sur ce point, voir p. 67).

2.1.2 Appartenance et inclusion

Il est extrêmement important de bien distinguer l'*appartenance* d'un élément à une classe et l'*inclusion* d'une classe dans une autre classe. Comme on l'a déjà dit, une classe et les éléments qui lui appartiennent ne sont pas de même "niveau logique" : on ne peut dire significativement de l'une ce que l'on peut dire des autres et réciproquement. Cela vaut en premier lieu des "objets" et des classes de "premier niveau".

Dans le langage ordinaire, ces deux relations s'expriment de la même manière en faisant usage de ce que les logiciens classiques appelaient la *copule*, i.e. le verbe *être*. On dit tout aussi bien : *Socrate est philosophe* que *tout philosophe est sage* (ou, plus lourdement : *tous les philosophes sont sages*). Le premier "jugement" est dit traditionnellement *singulier* et le second *universel* et la logique classique ne voit, éventuellement, dans cette différence qu'une différence de *quantité*, le premier étant un jugement *singulier* et le second un jugement *universel*, ce qui n'affecte en rien le fait que ces deux types de jugement ont fondamentalement la même forme logique sous-jacente, à savoir la forme "S est P", "est" étant supposé avoir un sens invariable quelle que soit la quantité du jugement.

On a vu (cf. p. **??**) que dans l'exposé qu'Aristote fait de la syllogistique dans les *Premiers Analytiques*, il ne fait pas intervenir de jugement singulier, car il lui faut, pour conserver toute sa généralité à son exposé, admettre que les *termes* qui interviennent dans un syllogisme peuvent occuper indifféremment la position de sujet ou celle de prédicat, ce qui n'est pas possible pour un terme singulier.

Il reste que dans certaines circonstances, il ne semble pas scandaleux que, par ex., le petit terme (sujet de la conclusion) soit un terme singulier : pour ne prendre qu'un exemple très simple et qui du reste est souvent pris en exemple par les logiciens classiques postérieurs à Aristote, il semble tout à fait raisonnable de conclure de ce que tous les hommes sont mortels (majeure) et que Socrate est un homme (mineure), que Socrate est mortel ; ce qui n'est qu'un *Barbara* édulcoré dont le petit terme est le nom propre Socrate [14].

Du seul point de vue de la logique, il s'agit alors de savoir comment traiter un jugement dont le sujet est un terme singulier. La solution la plus généralement retenue, est qu'un jugement de ce genre doit être traité comme un universel : le terme "Socrate" est, a-t-on pu dire, pris "dans toute son étendue" dans la mineure et la conclusion de l'exemple ci-dessus [15]. Cela peut sonner étrange, mais c'est le "prix" à payer si l'on admet que la copule a le même sens dans un jugement singulier et dans un jugement universel (ou particulier).

Au rebours de la confusion de la logique classique, la logique contemporaine distingue nettement entre les deux sens de *être* qui sont impliqués dans les deux jugements : *Socrate* est *un philosophe* et *tout philosophe* est *sage* ; dans le premier cas, on exprime le fait qu'un objet "tombe sous" un concept (ou, plus simplement, qu'un objet a une certaine propriété), dans le second, le fait qu'un concept est "subordonné" à un autre : Socrate "tombe sous" le concept de "philosophe" dans le premier cas, mais, dans le second, le concept de "philosophe" est "subordonné" au concept de "sage". Dans ces termes un peu désuets, on voit que la première proposition exprime une relation entre un objet et un concept, alors que la seconde exprime une relation entre deux concepts [16].

Si l'on traduit cette distinction en termes de classes, on voit donc que la première proposition exprime l'*appartenance* de l'objet Socrate à la classe des philosophes, alors que la seconde exprime l'*inclusion* de la classe des philosophes dans la classe des sages.

Cette différence se traduit par le fait que ces deux relations n'ont pas les mêmes propriétés formelles : comme on l'a vu, l'inclusion est réflexive, antisymétrique et transitive, alors que l'appartenance ne peut être ni réflexive ni antisymétrique et est intransitive.

– Elle est ne peut être réflexive car il n'y a même aucun sens à écrire quelque chose comme : $a \in b$, "a" et "b" étant supposés être des noms d'objet, ou encore $\mathbf{A} \in \mathbf{B}$, "$\mathbf{A}$", "$\mathbf{B}$" étant supposés être des noms de classe de premier niveau, etc., puisque "$\in$" est une relation entre un élément et une classe et non pas entre un élément et un autre élément de même niveau. Il n'y a donc *a fortiori* aucun sens à écrire quelque chose comme $a \in a$.

– Pour une raison voisine, "$\in$" ne peut être antisymétrique ; on peut bien écrire significative-

14. Aristote, du reste, à la fin *Premiers Analytiques* ne se privait pas de prendre des exemples de ce genre ; voir en particulier le cas fameux du syllogisme dit "de Pittacos" en 70a 15 sq. : *Les ambitieux sont libéraux, Pittacos est ambitieux,* ergo : *Pittacos est libéral.*

15. Voir, par ex. la *Logique de Port Royal*, 2ème partie, chap. III ; ou encore : Leibniz, *Nouveaux Essais*, Livre IV, chap. XVII, §8, qui donne l'exemple suivant : "Car quoiqu'il soit vrai qu'il n'y a qu'un seul saint Pierre Apôtre, on peut pourtant dire que quiconque a été St. Pierre l'Apôtre a renié son Maître. Ainsi ce syllogisme : St. Pierre a renié son Maître, St. Pierre a été disciple, donc quelque disciple a renié son Maître (quoiqu'il n'ait que des propositions singulières), est jugé de les avoir universelles affirmatives et le mode sera *Darapti* de la troisième figure."

16. A cet égard, la confusion dont la logique classique s'est rendue coupable (ce que le logicien et philosophe anglais contemporain, P. Geach, appelait plaisamment le "péché originel" d'Aristote) consiste à ne pas tirer toutes les conséquences du fait qu'un "objet" n'est pas, logiquement, de même niveau qu'un "concept" (ou propriété), ce qui conduisit certains, comme Leibniz, à considérer qu'un objet (individu) est un concept dont la compréhension est infinie, mais dont l'extension est limitée à un individu. On est là au cœur de la question métaphysique classique de l'*individuation* : un individu n'est-il tel que parce que sa "notion individuelle" (comme disait, là encore, Leibniz) est d'une complexité infinie, ou bien parce qu'il est la matérialisation d'une *espèce dernière* (*species infima*) (Thomas d'Aquin, par ex. : thèse classique, qui peut se revendiquer d'Aristote, de l'individuation par la matière).

ment : $a \in \mathbf{A}$, mais évidemment pas : $\mathbf{A} \in a$.

– Elle est intransitive car (en admettant que "a" désigne un objet, "$\mathbf{A}$", une classe de premier niveau et "$\mathfrak{A}$", une classe de deuxième niveau (i.e. une classe de classes de premier niveau)), de : a $a \in \mathbf{A}$ et $\mathbf{A} \in \mathfrak{A}$, on ne peut déduire : $a \in \mathfrak{A}$.
Cela résulte immédiatement de la définition de "classe de deuxième niveau" : une classe de deuxième niveau, $\mathfrak{A}$, n'a comme éléments *que* des classes de premier niveau et donc aucun "objet" (qu'il appartienne ou non à une des classes de premier niveau qui sont éléments de $\mathfrak{A}$) ne peut en être un élément [17].

> Là encore, on peut remarquer que cela permet de sortir de l'embarras que rencontraient les médiévaux lorsqu'ils étaient confrontés à un (pseudo) syllogisme comme : homme est une espèce, Socrate est un homme, *ergo* Socrate est une espèce (*homo est species, Sortes est homo,* ergo *Sortes est species*). Si l'on ne distingue pas l'appartenance de l'inclusion, ou, si l'on veut, le fait pour un objet de "tomber sous" un concept et le fait pour un concept d'être "subordonné" à un autre concept, ce (pseudo) syllogisme devrait être accepté sans barguigner, ce contre quoi regimbe le simple bon sens ! En réalité, "species" est un concept de deuxième niveau sous lequel tombent des concepts de premier niveau comme "cheval", "frêne" ou "silex", mais non pas cette pierre que je manipule et qui est un silex (qui tombe sous le concept "silex").

2.2 Union

L'union de des deux classes $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ est notée : $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$.
Intuitivement, $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ est la classe dont les éléments appartiennent à $\mathbf{A}$ ou à $\mathbf{B}$ (ou aux deux, disjonction inclusive) ; par exemple : si $\mathbf{A} = \{a, b, c\}$ et $\mathbf{B} = \{a, d, e\}$, $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{a, b, c, d, e\}$.

Définition de l'union

$$x \in \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \text{ ssi } (x \in \mathbf{A} \vee x \in \mathbf{B}),$$

ce que l'on peut définir logiquement par :

$$x \in \mathbf{A} \cup \mathbf{B} =_{df} A(x) \vee B(x)$$

"union" est donc une opération sur les classes qui, à des classes, fait correspondre une nouvelle classe.

Propriétés de l'union :

– Idempotence : $\mathbf{A} \cup \mathbf{A} = \mathbf{A}$

– Associativité : $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{C} = \mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})$; on peut donc se passer des parenthèses et écrire simplement : $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$.

17. Cette remarque se généralise : si $\mathbf{A}$ est une classe de niveau n, $\mathfrak{A}$ une classe de niveau $n+1$ et $\mathcal{A}$ une classe de niveau $n+2$, de $\mathbf{A} \in \mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}$, on ne peut déduire : $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$.

– Commutativité : $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{B} \cup \mathbf{A}$

Transcription dans le symbolisme du calcul des prédicats

– Idempotence : $\forall x\{[A(x) \vee A(x)] \Leftrightarrow A(x)\}$, ce qui est encore trivial !

– Associativité : $\forall x\{\{[A(x) \vee B(x)] \vee C(x)\} \Leftrightarrow \{A(x) \vee [B(x) \vee C(x)]\}\}$, ce qui ne fait qu'exploiter l'associativité de la disjonction.

– Commutativité : $\forall x\{[A(x) \vee B(x)] \Leftrightarrow [B(x) \vee A(x)]\}$, ce que ne fait qu'exploiter la commutativité de la disjonction.

On remarque, sans surprise, que l'union a exactement les mêmes propriétés que la disjonction (inclusive).

On peut évidemment généraliser à l'union de plus de deux classes.

Remarque importante : l'expression "$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$" est le *nom d'une classe* et n'est donc ni vraie ni fausse, alors que "$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$" est une *proposition* qui, elle, est vraie ou fausse.

2.3 Intersection

L'intersection de deux classes $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ est notée : $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$.

Intuitivement, $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ est la classe dont les éléments appartiennent à la fois à $\mathbf{A}$ et à $\mathbf{B}$; par exemple : si $\mathbf{A} = \{a, b, c, d, e\}$ et $\mathbf{B} = \{b, d, f, g\}$, $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{b, d\}$.

Définition de l'intersection

$$x \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \text{ ssi } (x \in \mathbf{A} \wedge x \in \mathbf{B})$$

ce que l'on peut définir logiquement par :

$$x \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B} =_{df} A(x) \wedge B(x)$$

"intersection", comme "union", est une opération sur les classes qui, à des classes, fait correspondre une nouvelle classe. Cette opération a les mêmes propriétés que "union" :

Propriétés de l'intersection :

– Idempotence : $\mathbf{A} \cap \mathbf{A} = \mathbf{A}$

– Associativité : $(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})\cap\mathbf{C} = \mathbf{A}\cap(\mathbf{B}\cap\mathbf{C})$; même remarque que pour l'associativité de l'union.

– Commutativité : $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{B} \cap \mathbf{A}$

Transcription dans le symbolisme du calcul des prédicats :

– Idempotence : $\forall x\{[A(x) \wedge A(x)] \Leftrightarrow A(x)\}$, ce qui est encore trivial !

– Associativité : $\forall x\{\{[A(x)\wedge B(x)]\wedge C(x)\} \Leftrightarrow \{A(x)\wedge[B(x)\wedge C(x)]\}\}$, ce qui ne fait qu'exploiter l'associativité de la conjonction.

– Commutativité : $\forall x\{[A(x) \wedge B(x)] \Leftrightarrow [B(x) \wedge A(x)]\}$, ce que ne fait qu'exploiter la commutativité de la conjonction.

On remarque, sans surprise, que l'union a exactement les mêmes propriétés que la conjonction.
On peut évidemment généraliser à l'intersection de plus de deux classes.

A noter : tout comme l'expression "$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$", l'expression "$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$" est le nom d'une classe.

2.4 Classe nulle, classe universelle et complémentation.

1. La classe nulle (que l'on note : "$\emptyset$") est incluse dans toute classe :
$$\text{quelle que soit } \mathbf{A},\ \emptyset \subseteq \mathbf{A},$$
ce que l'on peut transcrire par (P représentant une propriété quelconque) :
$$\forall x \sim P(x) \Rightarrow \forall y[P(y) \Rightarrow A(y)].$$

   Démonstration : supposons que cela puisse être faux. Alors l'antécédent serait vrai et le conséquent faux. Si $\forall y[P(y) \Rightarrow A(y)]$ est faux cela signifie qu'il existe un objet, disons a, tel que $P(a) \Rightarrow A(a)$ est faux et donc : $\boxed{P(a) \textit{ est vrai}}$ et $A(a)$ est faux.
   Mais l'antécédent, $\forall x \sim P(x)$, vaut pour tout objet et donc en particulier pour a et donc $\boxed{\sim P(a) \textit{ est vrai}}$, ce qui contredit ce qui précède.

2. Toute classe est incluse dans la classe universelle (que l'on note V) :
$$\text{quelle que soit } \mathbf{A},\ \mathbf{A} \subseteq \mathsf{V},$$
ce que l'on peut transcrire par (P représentant une propriété quelconque) :
$$\forall x P(x) \Rightarrow \forall y[A(y) \Rightarrow P(y)].$$

   Même type de démonstration que ci-dessus.

3. Etant donné une classe $\mathbf{A}$ quelconque, on peut former la classe complémentaire de $\mathbf{A}$ que l'on note : $\mathbf{A}^*$.
   Définition :
   $$x \in \mathbf{A}^* \text{ ssi } x \notin \mathbf{A}.$$
   Transcription dans le symbolisme du calcul des prédicats :
   $$x \in \mathbf{A}^* =_{df} \sim A(x)$$
4. Si $\mathbf{A} \subseteq \mathsf{E}$, on peut former le complémentaire de $\mathbf{A}$ par rapport à E, ce que l'on note : $\mathsf{E} - \mathbf{A}$, ou aussi $\complement_{\mathsf{E}}\mathbf{A}$.
   Définition :
   $$x \in \complement_{\mathsf{E}}\mathbf{A} \text{ ssi } x \in \mathsf{E} \text{ et } x \notin \mathbf{A}.$$
   Transcription dans le symbolisme du calcul des prédicats :
   $$x \in \complement_{\mathsf{E}}\mathbf{A} =_{df} \; E(x) \wedge \sim A(x)$$

2.4.1 Les types de "jugement" de la logique classique et le calcul des classes.

On peut exprimer à l'aide de la classe nulle et de l'intersection que deux classes $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont disjointes (i.e. n'ont aucun élément en commun), par : $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$, ce qui correspond au jugement en E de la logique classique (universel négatif : Aucun S n'est P).

De la même manière, on peut exprimer que deux classes $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ ont au moins un élément en commun, par : $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \emptyset$, ce qui correspond au jugement en I de la logique classque (particulier affirmatif : Quelque S est P).

Avec ce que l'on a vu dans la section sur l'inclusion (cf. section 2.1.1, p. 11), on peut donc exprimer les quatre types de jugement de la logique classique, A, E, I et O en termes de classes ; voilà un tableau récapitulatif (qui indique également comment ces types de jugement s'expriment dans le symbolisme logique) :

A : Tous les S sont P	$\forall x(Sx \Rightarrow Px)$	$\mathbf{S} \subseteq \mathbf{P}$
E : Aucun S n'est P	$\forall x(Sx \Rightarrow \sim Px)$	$\mathbf{S} \cap \mathbf{P} = \emptyset$
I : Quelque S est P	$\exists x(Sx \wedge Px)$	$\mathbf{S} \cap \mathbf{P} \neq \emptyset$
O : Quelque S n'est pas P	$\exists x(Sx \wedge \sim Px)$	$\mathbf{S} \nsubseteq \mathbf{P}$

Il est facile de voir, avec cette notation, que A et O sont contradictoires, tout comme E et I.

2.5 Relations entre inclusion, union, intersection et complémentation

1. Lois de distributivité :

   – $\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A} \cup \mathbf{C})$
   – $\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$

2. Lois dites de « de Morgan »
   – $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* \cap \mathbf{B}^*$
   – $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* \cup \mathbf{B}^*$

3. Autres lois.
   E ci-dessous désigne une classe dans laquelle est incluse la classe $\mathbf{A}$.

$\mathbf{A} \cup \mathsf{V} = \mathsf{V}$	$\mathbf{A} \cap \mathsf{V} = \mathbf{A}$
$\mathbf{A} \cup \mathsf{E} = \mathsf{E}$	$\mathbf{A} \cap \mathsf{E} = \mathbf{A}$
$\mathbf{A} \cup \emptyset = \mathbf{A}$	$\mathbf{A} \cap \emptyset = \emptyset$
$\mathbf{A} \cup \mathbf{A}^* = \mathsf{V}$	$\mathbf{A} \cap \mathbf{A}^* = \emptyset$
$\mathbf{A} \cup \complement_{\mathsf{E}}\mathbf{A} = \mathsf{E}$	$\mathbf{A} \cap \complement_{\mathsf{E}}\mathbf{A} = \emptyset$

$\mathsf{V}^* = \emptyset$	$\emptyset^* = \mathsf{V}$
$\mathbf{A}^{*^*} = \mathbf{A}$	
$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$	$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \subseteq \mathbf{B}$
$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$	$\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$
$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ ssi $\mathbf{B}^* \subseteq \mathbf{A}^*$	
$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ ssi $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{B}$	$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ ssi $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{A}$

On pourra s'exercer à écrire dans le symbolisme du calcul des prédicats les lois ci-dessus ; on remarquera facilement l'analogie entre ces lois et des lois logiques bien connues.

Exemple pour : $\mathbf{A} \cup \complement_{\mathsf{E}}\mathbf{A} = \mathsf{E}$:

$$\forall x[A(x) \Rightarrow E(x)] \Rightarrow \forall y\{\{A(y) \vee [E(y) \wedge \sim A(y)]\} \Leftrightarrow E(y)\}$$

2.6 Autres lois avec démonstration.

1. Soit $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ trois classes. On montre que :

   - si $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ et $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{C}$, alors $\mathbf{A} \subseteq (\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$.

   Il faut montrer que pour tout x, si $x \in \mathbf{A}$, alors $x \in (\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$. Soit a, un élément quelconque de $\mathbf{A}$. Comme (par hypothèse) $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, alors, par définition de "$\subseteq$", $a \in \mathbf{B}$ et comme (par hypothèse) $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{C}$, alors, toujours par définition de "$\subseteq$", $a \in \mathbf{C}$; donc $a \in \mathbf{B}$ et $a \in \mathbf{C}$, d'où il résulte, par définition de "$\cap$" : $a \in (\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$.

Comme a est quelconque, cela vaut pour tout x appartenant à $\mathbf{A}$ et donc : pour tout $x \in \mathbf{A}$, $x \in (\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque : cette dernière étape de la démonstration consiste à appliquer une règle d'inférence classique en logique des prédicats qui peut s'énoncer : ce qui vaut d'un objet *quelconque* (ici "a"), vaut de tous ("pour tout x") ; par ex. : ce qui vaut d'un étudiant quelconque, vaut de tous les étudiants.

Dans la notation du calcul des prédicats, cela s'exprime par :

$\{\forall x[A(x) \Rightarrow B(x)] \wedge \forall y[A(y) \Rightarrow C(y)]\} \Rightarrow \forall z\{A(z) \Rightarrow [B(z) \wedge C(z)]\}$.

Démonstration par l'absurde : supposons que cela puisse être faux, autrement dit, supposons l'antécédent vrai et le conséquent faux. Si le conséquent est faux, alors il existe un élément a, tel que :

- $A(a)$ est vrai
et
- $B(a) \wedge C(a)$ est faux ; autrement dit : $B(a)$ est faux ou $C(a)$ est faux.

Supposons $B(a)$ faux (le même raisonnement vaudrait pour $C(a)$ faux) ; on admet donc :

$\boxed{A(a)\ est\ vrai}$ et $\boxed{B(a)\ est\ faux}$.

On montre que cela contredit l'hypothèse que l'antécédent de l'implication principale est vrai ; en effet, puisque $\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \wedge \forall y(A(y) \Rightarrow C(y))$ est vrai, les deux membres de la conjonction sont vrais et donc, en particulier, $\forall x(A(x) \Rightarrow B(x))$. Puisque cette formule vaut pour tout x, elle vaut en particulier de a, et donc $\boxed{A(a) \Rightarrow B(a)}$ est vrai, ce qui contredit $A(a)$ est vrai et $B(a)$ est faux.
On en conclut qu'il ne peut exister d'élément a rendant fausse la formule de départ. Cette formule est donc universellement valide.

Exercice : démontrer la réciproque.

2. Soit $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$, trois classes. On montre que :

   - si $(\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \subseteq \mathbf{A}$ alors $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ et $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{A}$

   Il faut montrer, en supposant $(\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \subseteq \mathbf{A}$, que pour tout x, si $x \in \mathbf{B}$, alors $x \in \mathbf{A}$, et, pour tout y, si $y \in \mathbf{C}$, alors $y \in \mathbf{A}$.

   – Soit b un élément quelconque de $\mathbf{B}$: alors, par définition de '$\cup$', $b \in (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})$, et donc, comme $(\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \subseteq \mathbf{A}$, $b \in \mathbf{A}$; comme b est un élément quelconque de $\mathbf{B}$, cela vaut de tous les éléments de $\mathbf{B}$, et donc : $\forall x(x \in \mathbf{B} \Rightarrow x \in \mathbf{A})$, c'est à dire : $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$.

   – Même chose pour un élément quelconque c de $\mathbf{C}$.

   Dans la notation du calcul des prédicats, cela s'exprime par :

   $\forall x\{[B(x) \vee C(x)] \Rightarrow A(x)\} \Rightarrow \{\forall y[B(y) \Rightarrow A(y)] \wedge \forall z[C(z) \Rightarrow A(z)]\}$.

Supposons cette implication fausse, autrement dit supposons l'antécédent vrai et le conséquent faux. Si le conséquent est faux, alors il existe un élément a, tel que :
- $B(a)$ est vrai et $A(a)$ est faux ;
ou bien :
- $C(a)$ est vrai et $A(a)$ est faux.
Supposons $\boxed{B(a)\ vrai}$ et $\boxed{A(a)\ faux}$ (le même raisonnement vaudrait pour $C(a)$ vrai et $A(a)$ faux).

On montre que cela contredit l'hypothèse que l'antécédent de l'implication principale est vrai ; en effet puisque $\forall x[(B(x) \vee C(x)] \Rightarrow A(x)\}$ est vrai, cette formule vaut pour tout x, elle vaut en particulier pour a, et donc $\boxed{[(B(a) \vee C(a)] \Rightarrow A(a)\ est\ vrai}$ ce qui contredit $B(a)$ vrai et $A(a)$ faux.

On en conclut qu'il ne peut exister d'élément a rendant fausse la formule de départ. Cette formule est donc universellement valide.

Exercice : démontrer la réciproque.

3 Langage pour le calcul des prédicats (monadiques) ; évaluation d'une formule.

3.1 Langage $\mathcal{L}$.

3.1.1 Symboles de $\mathcal{L}$

Le langage $\mathcal{L}$ comporte les symboles suivants :

– Un ensemble V de variables d'individu en nombre éventuellement infini (dénombrable) : $x_1, \ldots, x_n \ldots$

  Remarque : les indices ne sont là que pour distinguer les lettres 'x', mais quand il y a peu de variables, comme c'est souvent le cas, on utilisera les lettres x, y, z, et, éventuellement t, u, v.

– Des lettres de prédicat à une place, $P_1, \ldots, P_n \ldots$; même remarque que ci-dessus pour les indices : on utilisera les lettres P, Q, S, etc.

– Les connecteurs habituels : $\sim$, $\wedge, \vee, \Rightarrow$.

– Les quantificateurs : $\forall$ ("pour tous") et $\exists$ ("il existe au moins un")

– Toutes les parenthèses, accolades et crochets nécessaires.

3.1.2 Formules de $\mathcal{L}$

On définit récursivement ce que l'on admettra comme étant une formule bien formée du langage ; cela signifie que l'on définit d'abord les formules élémentaires, puis, on indique comment former une nouvelle formule bien formée à partir d'autres formules supposées déjà bien formées.

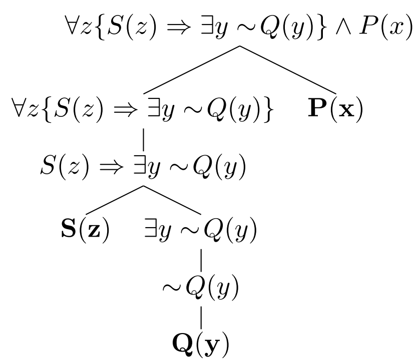
1. Une formule élémentaire est formée d'une lettre de prédicat suivie d'une variable d'individu : $P_i(x)$ est une formule élémentaire.

   Supposons que φ et ψ soient des formules bien formées, alors :
2. (a) $\sim\varphi$ est une formule bien formée.
   (b) $\varphi \wedge \psi,\ \varphi \vee \psi,\ \varphi \Rightarrow \psi$ sont des formules bien formées.
   (c) $\forall x\varphi$ et $\exists x\varphi$ sont des formules bien formées.

Par ex. : soit les formules élémentaires bien formées $P(x)$, $Q(y)$ et $S(z)$.

En vertu de 2.a, on peut former $\sim Q(y)$
En vertu de 2.c, on peut former : $\exists y \sim Q(y)$
En vertu de 2.b, on peut former : $S(z) \Rightarrow \exists y \sim Q(y)$
En vertu de 2.c, on peut former : $\forall z\{S(z) \Rightarrow \exists y \sim Q(y)\}$
En vertu de 2.b, on peut former : $\forall z\{S(z) \Rightarrow \exists y \sim Q(y)\} \wedge P(x)$.

On peut représenter cette démarche sous forme d'arbre ainsi (à lire du bas vers le haut, les formules élémentaires dont on part sont en gras ; lu de haut en bas, il s'agit d'un arbre de décompostion) :



3.1.3 Occurrence libre, occurrence liée des variables.

Les variables qui figurent dans une formule peuvent avoir deux types d'occurrences et, partant, deux types de "signification" : l'occurrence d'une variable peut être ou *libre* ou *liée*. Pour comprendre cette distinction, il faut définir ce que l'on entend pas *portée d'une quantificateur*.

Soit l'exemple de la formule ci-dessus : $\forall z\{S(z) \Rightarrow \exists y \sim Q(y)\} \wedge P(x)$. Considérons le quantificateur en z, à savoir "$\forall z$" ; la *portée* de $\forall z$ est définie comme étant la sous-formule délimitée par le crochet ouvrant qui suit immédiatement $\forall z$ et le crochet fermant correspondant, autrement dit, comme étant la sous formule $\{S(z) \Rightarrow \exists y \sim Q(y)\}$. La variable z qui figure dans cette sous-formule est donc dans la portée de $\forall z$ est on dit alors que z est *lié* par $\forall z$.

La portée du quantificateur en y se limite à la sous formule qui le suit immédiatement, à savoir : $\sim Qy$; dans cette sous-formule y est donc lié par $\exists y$. On retrouve la définition précédente si l'on admet que la sous-formule $\sim Qy$ devrait être mise entre parenthèses et s'écrire : $(\sim Qy)$. On peut alors dire comme précédemment, que la portée de $\exists y$ est la sous-formule délimitée par la parenthèse ouvrante qui suit immédiatement $\exists y$ et la parenthèse fermante correspondante.

Par contre, dans la formule complète : $\forall z\{S(z) \Rightarrow \exists y \sim Q(y)\} \wedge P(x)$, la variable x n'est dans la portée d'aucun quantificateur en x : x est donc *libre* dans cette formule. On constate, en particulier que, par définition, la variable qui figure dans une formule élémentaire est toujours libre.

Plus formellement : soit φ une formule de $\mathcal{L}$ et x une variable figurant dans φ ; on définit récursivement "x a une occurrence libre dans φ" par :

- si φ est une formule atomique, x a une occurrence libre dans φ.
- si φ est de la forme $\sim\psi$, x a une occurrence libre dans φ ssi x a une occurrence libre dans ψ.
- si φ est de la forme $\psi \wedge \theta$, $\psi \vee \theta$, $\psi \Rightarrow \theta$, x a une occurrence libre dans φ ssi x a une occurrence libre dans ψ ou x a une occurrence libre dans θ.
- si φ est de la forme $\exists y\psi$, $\forall y\psi$, x a une occurrence libre dans φ ssi x a une occurrence libre dans ψ et $x \neq y$.

Si, dans une formule, aucune variable n'a d'occurrence libre, on dit que la formule est *close*.

3.2 Evaluation d'une formule.

Jusqu'ici une formule "ne veut rien dire" et n'est donc ni vraie ni fausse ; elle est une simple suite de marques graphiques.

Comme en propositionnelle, pour pouvoir évaluer une formule complexe, il faut d'abord fixer la valeur de vérité des formules élémentaires. Mais en logique des prédicats les choses sont un peu plus compliquées qu'en propositionnelle puisque les formules élémentaires ne sont plus prises "en bloc", la seule chose à fixer étant qu'elles sont vraies ou fausses.

Les formules élémentaires de $\mathcal{L}$ permettent de "dire" d'objets qu'ils ont telles ou telles propriétés [18] ; pour déterminer leur vérité ou leur fausseté, il faut donc fixer à quels objets on a affaire et quelles sont leurs propriétés ; autrement dit, il faut fixer un "domaine d'objets", et déterminer, pour chacun des objets appartenant à ce domaine, quelles propriétés il a, ou n'a pas.

Par ailleurs, une formule élémentaire de $\mathcal{L}$ ne comporte qu'une lettre de prédicat et une variable d'individu (d'objet). On ne peut déterminer sa vérité ou sa fausseté que si l'on stipule quelle propriété "interprète" la lettre de prédicat et quel objet "interprète" la variable d'individu. Il faut donc, en général, pour pouvoir déterminer la valeur de vérité de toutes les formules élémentaires de $\mathcal{L}$ fixer l'interprétation de chaque lettre de prédicat et de chaque variable d'individu de $\mathcal{L}$.

Ces remarques informelles conduisent aux clauses suivantes permettant d'évaluer une formule de $\mathcal{L}$ dans un domaine donné.

- On fixe tout d'abord un domaine d'objets, non vide [19], que l'on note : D. En général, dans ce qui suit, on n'aura affaire qu'à des domaines finis et même très "petits", par exemple, $D = \{a, b, c\}$ (Robinson, Vendredi et le chien Tenn, si l'on veut...) mais on pourrait avoir affaire à des domaines infinis (les nombres entiers naturels, par ex.).

18. On verra plus tard comment étendre ce langage pour pouvoir "dire" d'objets qu'ils entretiennent telles ou telles *relations*

19. Pour la justification du fait que l'on ne considère que des domaines non-vides, voir l'appendice B.3.

– Interprétation des variables d'individu.
On stipule quel élément du domaine est censée désigner chaque variable, cela se fait par l'intermédiaire d'une fonction $i : V \rightarrow D$, dite fonction d'interprétation, qui, à chaque variable, fait correspondre un et un seul élément de D ; l'expression "$i(x)$" est donc le nom de l'élément de D qui interprète la variable x.

– Interprétation des lettres de prédicat.

Remarque préliminaire Comme on l'a vu, le parti-pris extensionnaliste de la logique contemporaine conduit à assimiler une propriété à la classe des objets qui ont ladite propriété, et donc, dans le cas présent, à un sous-ensemble (sous-classe) de D. Il en résulte que, étant donné un domaine D, on peut déterminer systématiquement l'ensemble des propriétés que peuvent avoir les objets appartenant à D, qui n'est autre que l'ensemble des sous-ensembles de D.

Par ex. soit $D = \{a, b, c\}$.
L'ensemble des sous-ensembles de D (noté $\wp(D)$) est l'ensemble :

$$\wp(D) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\big\}.$$

Il y a donc huit propriétés distinctes que peuvent "avoir" les éléments de $D = \{a, b, c\}$. En général, si un domaine contient n éléments, il y a 2^n sous-ensembles de D et donc 2^n "propriétés" que peuvent avoir les éléments du domaine.

Dire que l'élément b, par ex. "a la propriété $\mathbf{P}$" se dit alors : b appartient à $\mathbf{P}$ ($b \in \mathbf{P}$).

Pour interpréter les lettres de prédicat de $\mathcal{L}$ il faut donc stipuler quelle propriété (sous-ensemble de D) interprète chacune d'elle.

Rappel des conventions d'écriture : on admettra que les propriétés (donc les classes) sont écrites en caractères gras : $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{S}$, etc. On admettra également que $\mathbf{P}$ est l'interprétation de la lettre de prédicat P, $\mathbf{Q}$ de la lettre de prédicat Q, etc.

Un domaine D et une interprétation des lettres de prédicat étant fixés, on peut maintenant calculer la valeur de vérité d'une formule φ, pour une interprétation donnée i des variables d'individu, en se conformant aux clauses suivantes :

Point de vocabulaire préalable : dans ce qui suit, l'expression "une interprétation i', x-variante de i" désigne une interprétation i' (des variables d'individu) telle que pour toute variable y différente de x, $i'(y) = i(y)$, alors que pour x, $i'(x)$ *peut* être différent de $i(x)$; on admet donc (par commodité) que i elle-même est une interprétation x-variante de i (x-variante d'elle-même).

1. si φ est une formule élémentaire de la forme $P(x)$, φ est vraie dans D pour i ssi $i(x) \in \mathbf{P}$.
2. si φ est de la forme $\sim\psi$, φ est vraie dans D pour i ssi ψ est faux dans D pour i
3. si φ est de la forme $\psi \wedge \theta$, φ est vraie dans D pour i ssi ψ est vraie dans D pour i et θ est vraie dans D pour i.

4. si φ est de la forme $\psi \vee \theta$, φ est vraie dans D pour i ssi ψ est vraie dans D pour i ou θ est vraie dans D pour i.
5. si φ est de la forme $\psi \Rightarrow \theta$, φ est vraie dans D pour i ssi ψ est fausse dans D pour i ou θ est vraie dans D pour i.
6. si φ est de la forme $\forall x\psi$, φ est vraie dans D pour i ssi ψ est vraie dans D pour toute interprétation i', x variante de i.
7. si φ est de la forme $\exists x\psi$, φ est vraie dans D pour i ssi ψ est vraie dans D pour au moins une interprétation i', x variante de i.

Pour simplifier, on notera dorénavant la formule : φ est vraie dans D pour l'interprétation i, par : $D \vDash_i \varphi$ (et $D \nvDash_i \varphi$: φ est fausse dans D pour i.)

3.2.1 Exemples d'évaluation

1. Evaluation de la formule : $P(x) \Rightarrow \exists y Q(y)$

   Soit les données suivantes :

   $D = \{a, b, c\}$
   $\mathbf{P} = \{a\}$ et $\mathbf{Q} = \{a, c\}$.
   $i(x) = a$ et $i(y) = b$[20].

   Alors :

   $D \vDash_i P(x) \Rightarrow \exists y Q(y)$ ssi (1) $D \nvDash_i P(x)$ ou (2) $D \vDash_i \exists y Q(y)$ (clause 5).

   Deux cas à examiner éventuellement :
   (1) $D \vDash_i P(x)$ ssi $i(x) \in P$ (clause 1) ; or $i(x) = a$ et $a \in \mathbf{P}$; donc, $D \vDash_i P(x)$.

   Il faut donc examiner (2) :

   (2) $D \vDash_i \exists y Q(y)$ ssi $D \vDash_{i'} Q(y)$ pour au moins une interprétation i', y-variante de i (clause 7). On *constate* que pour $i'(y) = a$, par ex., $D \vDash_{i'} Q(y)$ puisque $a \in \mathbf{Q}$. Donc $D \vDash_i \exists y Q(y)$.

   Les deux membres de l'implication son vrais dans D pour i, donc l'implication est vraie dans D pour i, i.e. : $D \vDash_i P(x) \Rightarrow \exists y Q(y)$.

2. Evaluation de $[\exists x P(x) \wedge \exists y Q(y)] \Rightarrow \exists z[(P(z) \wedge Q(z)]$.

20. Il est inutile de fixer l'interprétation des lettres de prédicat et des variables d'individu qui ne figurent pas dans la formule à évaluer car la valeur de vérité d'une formule ne dépend que de l'interprétation des lettres de prédicat et des variables d'individu qui figurent en elle.

Soit les données suivantes :

$D = \{a, b\}$.
$\mathbf{P} = \{a\}$ et $\mathbf{Q} = \{b\}$.
$i(x) = a$, $i(y) = b$ et $i(z) = b$.

Alors :

$D \vDash_i [\exists x P(x) \wedge \exists y Q(y)] \Rightarrow \exists z[(P(z) \wedge Q(z)]$ ssi (clause 5) :

1. $D \nvDash_i \exists x P(x) \wedge \exists y Q(y)$ ou
2. $D \vDash_i \exists z[(P(z) \wedge Q(z)]$.

Il faut donc examiner éventuellement les deux cas.

1. $D \nvDash_i \exists x P(x) \wedge \exists y Q(y)$ ssi (clause 3) $D \nvDash_i \exists x P(x)$ <u>ou</u> $D \nvDash_i \exists y Q(y)$; deux cas là encore :

1. a. : $D \nvDash_i \exists x P(x)$ ssi (clause 7) il n'existe pas d'interprétation i', x-variante de i telle que $D \vDash_{i'} P(x)$; or on constate que pour $i'(x) = a$, $D \vDash_{i'} P(x)$ puisque $a \in \mathbf{P}$ et donc : $D \vDash_i \exists x P(x)$. Il faut donc examiner l'autre cas.

1. b. : $D \nvDash_i \exists y Q(y)$ ssi (clause 7) il n'existe pas d'interprétation i', y-variante de i telle que $D \vDash_{i'} Q(y)$; or on constate que pour $i'(x) = b$, $D \vDash_{i'} Q(y)$ puisque $b \in \mathbf{Q}$ et donc ; $D \vDash_i \exists y Q(y)$.

Il en résulte : $D \vDash_i \exists x P(x) \wedge \exists y Q(y)$. Il faut donc examiner le cas 2.

2. $D \vDash_i \exists z[(P(z) \wedge Q(z)]$ ssi (clause 7) il existe une interprétation i', z-variante de i, telle que $D \vDash_{i'} P(z) \wedge Q(z)$ ssi (clause 3) il existe une interprétation i', z-variante de i telle que $D \vDash_{i'} P(z)$ <u>et</u> $D \vDash_{i'} Q(z)$.
On constate que pour $i'(z) = a$, $D \vDash_{i'} P(z)$ et $D \nvDash_{i'} Q(z)$ (puisque $a \in \mathbf{P}$ et $a \notin \mathbf{Q}$) et pour $i'(z) = b$, $D \nvDash_{i'} P(z)$ et $D \vDash_{i'} Q(z)$ (puisque $b \notin \mathbf{P}$ et $b \in \mathbf{Q}$).
Il n'existe donc pas d'interprétation i', z-variante de i telle que $D \vDash_{i'} P(z)$ et $D \vDash_{i'} Q(z)$.
Donc : $D \nvDash_i \exists z[(P(z) \wedge Q(z)]$.

En fin de compte, on a :
1. $D \vDash_i [\exists x P(x) \wedge \exists y Q(y)]$ et
2. $D \nvDash_i \exists z[(P(z) \wedge Q(z)]$.

Il en résulte :$D \nvDash_i [\exists x P(x) \wedge \exists y Q(y)] \Rightarrow \exists z[(P(z) \wedge Q(z)]$

Remarque importante : lorsque dans une formule φ au moins une variable figure libre, la valeur de vérité de cette formule dans un domaine, pour une interprétation des lettres de prédicat et une interprétation des variables d'individu, dépend évidemment de la valeur que l'interprétation des variables d'individu donne à la variable figurant libre dans φ. Cela apparaît clairement dans le premier exemple : la valeur de vérité de l'antécédent de l'implication est déterminée par l'interprétation $i(x) = a$; pour $i(x) = b$, l'antécédent aurait été faux.

Mais on se persuade aisément, en considérant les règles d'évaluation 6. et 7. que si toutes les variables sont liées dans φ, autrement dit que si φ est une formule close, tel n'est plus le cas. Il est facile de voir que dans le deuxième exemple ci-dessus, on aurait pu fixer différemment l'interprétation i sans que cela ne change quoi que ce soit à l'évaluation de la formule. Ce qui revient à dire que cette formule est fausse dans D pour l'interprétation donnée des lettres de prédicat, quelle que soit l'interprétation i des variables d'individu.

En conséquence, si φ est une formule close, il n'est pas nécessaire de fixer une interprétation particulière des variables d'individu pour établir sa vérité ou sa fausseté dans un domaine pour une interprétation des lettres de prédicat ; on peut donc écrire : $D \vDash \varphi$ ou $D \nvDash \varphi$ sans mentionner en indice une interprétation i particulière.

3. Autre exemple d'évaluation : soit la formule correspondant au syllogisme en Darapti :

$$\{\forall x([M(x) \Rightarrow P(x)] \wedge \forall y[M(x) \Rightarrow S(x)]\} \Rightarrow \exists z[S(z) \wedge P(z)]$$

Soit les données suivantes :

$D = \{a, b\}$
$\mathbf{S} = \{a\}$
$\mathbf{P} = \{b\}$
$\mathbf{M} = \emptyset$

Il est inutile de fixer l'interprétation des variables puisque aucune variable n'a d'occurrence libre.

Alors :

$D \vDash \{\forall x([M(x) \Rightarrow P(x)] \wedge \forall y[M(y) \Rightarrow S(y)]\} \Rightarrow \exists z[S(z) \wedge P(z)]$ ssi (clause 5) :

1. $D \nvDash \{\forall x([M(x) \Rightarrow P(x)] \wedge \forall y[M(y) \Rightarrow S(y)]\}$ ou
2. $D \vDash \exists z[S(z) \wedge P(z)]$

Il faut donc examiner éventuellement le deux cas.

Plutôt que de s'interroger sur la fausseté dans D de $\forall x([M(x) \Rightarrow P(x)] \wedge \forall y[M(x) \Rightarrow S(x)]$, on peut tout aussi bien s'interroger sur la vérité de cette formule dans D, la seule chose qui importe étant de déterminer sa valeur de vérité dans D, pour l'interprétation des lettres de prédicat : si elle n'est pas vraie dans D, c'est qu'elle est fausse dans D, et *vice versa*.

1. $D \vDash \forall x([M(x) \Rightarrow P(x)] \wedge \forall y[M(y) \Rightarrow S(y)]$ ssi (clause 3) $D \vDash \forall x([M(x) \Rightarrow P(x)]$ et $D \vDash \forall y[M(y) \Rightarrow S(y)]$.

1.a $D \vDash \forall x[M(x) \Rightarrow P(x)]$ ssi (clause 6.) pour toute interprétation i, $D \vDash_i M(x) \Rightarrow P(x)$.

Il y a deux interprétations possibles de x : $i(x) = a$ et $i'(x) = b$.

– $i(x) = a$: $D \vDash_i M(x) \Rightarrow P(x)$ ssi (clause 5.) $D \nvDash_i M(x)$ ou $D \vDash_i P(x)$; or $i(x) = a \notin \mathbf{M}$, donc (clause 1) $D \nvDash_i M(x)$, d'où : $D \vDash_i M(x) \Rightarrow P(x)$.

– $i'(x) = b$: $D \vDash_{i'} M(x) \Rightarrow P(x)$ ssi (clause 5.) $D \nvDash_{i'} M(x)$ ou $D \vDash_{i'} P(x)$; or $i'(x) = b \notin \mathbf{M}$, donc (clause 1) $D \nvDash_{i'} M(x)$, d'où : $D \vDash_{i'} M(x) \Rightarrow P(x)$.

Il en résulte (clause 6.) : $D \vDash \forall x[M(x) \Rightarrow P(x)]$

1.b $D \vDash \forall y[M(y) \Rightarrow S(y)]$ ssi pour toute interprétation i de y, $D \vDash_i M(y) \Rightarrow S(y)$.

On est exactement dans la même situation que pour 1.a ; donc : $D \vDash \forall y[M(y) \Rightarrow S(y)]$.

De 1.a et 1.b il résulte ((clause 3.) : $\boxed{D \vDash \forall x([M(x) \Rightarrow P(x)] \wedge \forall y[M(y) \Rightarrow S(y)]}$. Il faut donc examiner l'autre cas.

2. $D \vDash \exists z[S(z) \wedge P(z)]$ ssi (clause 7.) il existe une interprétation i de z telle que $D \vDash_i S(z) \wedge P(z)$.

Il y a deux interprétations possibles de z : $i(z) = a$ et $i'(z) = b$.

– $D \vDash_i S(z) \wedge P(z)$ ssi (clause 3.) $D \vDash_i S(z)$ et $D \vDash_i P(z)$; or $i(z) = a \notin \mathbf{P}$, d'où (clause 1) : $D \nvDash_i P(z)$ et donc : $D \nvDash_i S(z) \wedge P(z)$.

– $D \vDash_{i'} S(z) \wedge P(z)$ ssi (clause 3) $D \vDash_{i'} S(z)$ et $D \vDash_{i'} P(z)$; or $i'(z) = b \notin \mathbf{S}$, d'où (clause 1) : $D \nvDash_{i'} S(z)$ et donc : $D \nvDash_{i'} S(z) \wedge P(z)$.

Ii n'y a donc pas d'interprétation i de z telle que $D \vDash_i S(z) \wedge P(z)$ et donc : $\boxed{D \nvDash \exists z[S(z) \wedge P(z)]}$.

De l'examen des deux cas, 1. et de 2., il ressort que :

$$D \nvDash \{\forall x([M(x) \Rightarrow P(x)] \wedge \forall y[M(y) \Rightarrow S(y)]\} \Rightarrow \exists z[S(z) \wedge P(z)]$$

La formule correspondant au Darapti n'est donc pas valide, tout comme le Darapti lui-même.

3.2.2 Satisfiabilité, validité

– Une formule φ est dite *satisfiable* ssi il existe au moins un domaine D, une interprétation des lettres de prédicat et une interprétation i des variables d'individu tels que $D \vDash_i \varphi$.

– Une formule φ est dite *valide* dans un domaine D, ssi pour toute interprétation des lettres de prédicats et toute interprétation i des variables d'individu, $D \vDash_i \varphi$.

- Une formule φ est dite *universellement valide* ssi elle est valide dans tout domaine. Une formule universellement valide exprime une loi logique.

- Relations entre ces propriétés :
  - si une formule est universellement valide, sa négation n'est pas satisfiable.
  - si une formule est satisfiable, sa négation n'est pas universellement valide.

Il y a un nombre infini de domaines différents : contrairement à ce qui était le cas pour les formules du calcul des propositions, il est donc impossible de déterminer directement si une formule est universellement valide, en "faisant le tour" de tous les domaines et de toutes les interprétations des lettres de prédicat et des variables d'individu.

Par contre, si on montre qu'une formule est satisfiable, on est assuré que sa négation n'est pas universellement valide : la formule du deuxième exemple ci-dessus n'est donc pas universellement valide ; de la même manière si l'on montre qu'une formule ne peut être satisfiable, on est assuré que sa négation est universellement valide. C'est ainsi que, dans la section précédente, on a montré la validité universelle de plusieurs formules correspondant à des lois de calcul des classes.

3.3 Quantificateurs et connecteurs.

3.3.1 Transcription des universels en conjonction ; des existentiels en disjonctions

Pour simplifier, on peut admettre que l'on peut substituer, dans une formule, à une variable un nom d'un élément du domaine. Si par exemple $D = \{a, b, c\}$ on convient que "a" est le nom de l'élément a, "b", le nom de l'élément b, etc. On utilise ici les mêmes lettres pour les éléments et pour les noms des éléments.

Ainsi on peut écrire une formule comme $P(a)$. $P(a)$ est vraie dans D ssi l'élément a de D a la propriété $\mathbf{P}$, c'est à dire ssi a appartient à $\mathbf{P}$ ($a \in \mathbf{P}$). On peut alors réécrire les clauses 6 et 7 de la manière suivante :

- 6' : si φ est de la forme $\forall x\psi$, φ est vraie dans D pour i ssi toutes les formules ψ', obtenues à partir de ψ en substituant un nom d'un élément de D à la variable x en toutes ses occurrences libres dans ψ, sont vraies dans D pour i.

- 7' : si φ est de la forme $\exists x\psi$, φ est vraie dans D pour i ssi au moins une formule ψ', obtenue à partir de ψ en substituant un nom d'un élément de D à la variable x en toutes ses occurrences libres dans ψ, est vraie dans D pour i.

Revenons maintenant sur la "signification des quantificateurs.

Le quantificateur universel ($\forall$) "signifie" que la formule qui est dans sa portée est vraie de tous les individus du domaine, ce qu'expriment les clauses 6 ou 6'.

Supposons maintenant que le domaine soit fini, par ex. $D = \{a, b, c\}$. Soit la formule toute simple $\forall xP(x)$: cette formule est vraie dans ce domaine ssi la conjonction '$P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$' est vraie dans D ; autrement dit ssi $a \in \mathbf{P}$ et $b \in \mathbf{P}$ et $c \in \mathbf{P}$, c'est à dire : ssi $\mathbf{P} = D = \{a, b, c\}$.

De la même manière, le quantificateur existentiel ($\exists$) “signifie” que la formule qui est dans sa portée est vraie d’au moins un individu du domaine $D = \{a, b, c\}$, ce qu’expriment les clauses 7 ou 7’. En conséquence, la formule $\exists x P(x)$ est vraie dans ce domaine ssi la disjonction ‘$P(a) \lor P(b) \lor P(c)$’ est vraie dans D ; autrement dit, ssi $a \in \mathbf{P}$ ou $b \in \mathbf{P}$ ou $c \in \mathbf{P}$, c’est à dire, ssi $\mathbf{P} \neq \emptyset$.

En généralisant, on peut alors réécrire une formule close en transcrivant les universels en conjonctions et les existentiels en disjonctions.

Ainsi dans la formule du deuxième exemple ci-dessus, $[\exists x P(x) \land \exists y Q(y)] \Rightarrow \exists z[(P(z) \land Q(z)]$, les trois sous-formules quantifiées peuvent se réécrire de la manière suivante, avec $D = \{a, b\}$:

$\exists x P(x)$	$\rightarrow$	$P(a) \lor P(b)$
$\exists x Q(x)$	$\rightarrow$	$Q(a) \lor Q(b)$
$\exists z[(P(z) \land Q(z)]$	$\rightarrow$	$[(P(a) \land Q(a)] \lor [(P(b) \land Q(b)]$

Ce qui donne pour la formule entière :

$$\{[P(a) \lor P(b)] \land [Q(a) \lor Q(b)]\} \Rightarrow \{[P(a) \land Q(a)] \lor [P(b) \land Q(b)]\}.$$

Cette formule s’évalue alors dans le domaine $D = \{a, b\}$ comme en propositionnel, sachant que, en vertu de l’interprétation donnée ci-dessus des lettres de prédicat, on a :

- $D \models P(a)$ et $D \not\models P(b)$
- $D \not\models Q(a)$ et $D \models Q(b)$.

On peut alors utiliser l’une des procédures utilisées en propositionnel ; par exemple :

$\{[P(a)$	$\lor$	$P(b)]$	$\land$	$[Q(a)$	$\lor$	$Q(b)]\}$	$\Rightarrow$	$\{[P(a)$	$\land$	$Q(a)]$	$\lor$	$[P(b)$	$\land$	$Q(b)]\}$
{ [V	$\lor$	F]	$\land$	[F	$\lor$	V]}	$\Rightarrow$	{[V	$\land$	F]	$\lor$	[F	$\land$	V]}
{	V		$\land$		V	}	$\Rightarrow$	{	F		$\lor$		F	}
			V				$\Rightarrow$				F			
							F							

Comme on s’y attendait sans doute, cette formule est bien fausse dans le domaine $D = \{a, b\}$ pour l’interprétation des lettres de prédicats : $\mathbf{P} = \{a\}$ et $\mathbf{Q} = \{b\}$.

3.3.2 Entrer / sortir les quantificateurs

On a les lois suivantes, appelées parfois "règles de passage", qui gouvernent le comportement des quantificateurs relativement aux différents connecteurs.

Dans ce qui suit on admettra que $\varphi[x]$ représente une formule quelconque dans laquelle x figure libre et ψ une formule dans laquelle x ne figure pas libre et que l’on admet même *close* pour simplifier (mais cela ne change rien !). Prendre garde au parenthésage !

a. i. $\forall x(\varphi[x] \wedge \psi) \Leftrightarrow (\forall x\varphi[x] \wedge \psi)$ ii. $\exists x(\varphi[x] \wedge \psi) \Leftrightarrow (\exists x\varphi[x] \wedge \psi)$

b. i. $\forall x(\varphi[x] \vee \psi) \Leftrightarrow (\forall x\varphi[x] \vee \psi)$ ii. $\exists x(\varphi[x] \vee \psi) \Leftrightarrow (\exists x\varphi[x] \vee \psi)$

En raison de la “commutativité” de $\wedge$ et de $\vee$, que $\varphi[x]$ soit à droite ou à gauche de ces connecteurs est indifférent.

La loi b. i., par ex. établit que le quantificateur en x peut soit porter sur la formule (disjonction) $\varphi[x] \vee \psi$ toute entière, soit ne porter que sur la sous formule $\varphi[x]$, pourvu que x ne soit pas libre dans l'autre membre de la disjonction ; même chose pour les autres lois.

On peut justifier ces lois de la manière suivante. Considérons, par ex. la loi b. i.. et pour simplifier on admet que ψ représente une formule close. Supposons que $\forall x(\varphi[x] \vee \psi) \Leftrightarrow (\forall x\varphi[x] \vee \psi)$ ne soit pas valide. Cela signifie que l'un des membres de la bi-implication est vrai dans un domaine D pour une interprétation des lettres de prédicat alors que l'autre est faux dans le même domaine pour la même interprétation.

– Supposons d'abord $D \vDash \forall x(\varphi[x] \vee \psi)$ et $D \nvDash \forall x\varphi[x] \vee \psi$.

  $D \nvDash \forall x\varphi[x] \vee \psi$ signifie $D \nvDash \forall x\varphi[x]$ et (1) $D \nvDash \psi$. Maintenant, $D \nvDash \forall x\varphi[x]$ signifie qu'il y a au moins un élément a de D tel que (2) $D \nvDash \varphi[a]$. D'un autre côté, puisque $D \vDash \forall x(\varphi[x] \vee \psi)$, cela vaut en particulier de a et donc on a : $D \vDash \varphi[a] \vee \psi$ et donc ou bien $D \vDash \varphi[a]$, ce qui contredit (2), ou bien $D \vDash \psi$ ce qui contredit (1).

  On ne peut donc avoir simultanément $D \vDash \forall x(\varphi[x] \vee \psi)$ et $D \nvDash \forall x\varphi[x] \vee \psi$.

– Supposons maintenant $D \nvDash \forall x(\varphi[x] \vee \psi)$ et $D \vDash \forall x\varphi[x] \vee \psi$.

  $D \nvDash \forall x(\varphi[x] \vee \psi)$ signifie qu'il existe au moins un élément a de D tel que l'on a : $D \nvDash \varphi[a] \vee \psi$, c'est à dire : (1) $D \nvDash \varphi[a]$ et (2) $D \nvDash \psi$. D'un autre côté, comme $D \vDash \forall x\varphi[x] \vee \psi$, cela signifie que l'on a ou bien $D \vDash \forall x\varphi[x]$, et donc en particulier, $D \vDash \varphi[a]$, ce qui contredit (1) ; ou bien $D \vDash \psi$, ce qui contredit (2).

  On ne peut donc avoir simultanément $D \nvDash \forall x(\varphi[x] \vee \psi)$ et $D \vDash \forall x\varphi[x] \vee \psi$. La bi-implication est donc valide.

On pourra s'exercer à faire le même genre de raisonnement pour les autres lois.

A la différence de ce qui précède, il importe, dans les formules suivantes, de prendre garde à la place de $\varphi[x]$ dans les implications, puisque l'implication n'est pas commutative.

c. i. $\forall x(\varphi[x] \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\exists x\varphi[x] \Rightarrow \psi)$ ii. $\exists x(\varphi[x] \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\forall x\varphi[x] \Rightarrow \psi)$

d. i. $\forall x(\psi \Rightarrow \varphi[x]) \Leftrightarrow (\psi \Rightarrow \forall x\varphi[x])$ ii. $\exists x(\psi \Rightarrow \varphi[x]) \Leftrightarrow (\psi \Rightarrow \exists x\varphi[x])$

Justification de la bi-implication c. i. On peut justifier la bizarrerie apparente de c.i. et c.ii. en s'appuyant sur les lois précédentes b.i. et b.ii. Prenons l'exemple de c.i. :

En vertu de l'équivalence de $\varphi \Rightarrow \psi$ et de $\sim\varphi \vee \psi$, on a :

$$\forall x(\varphi[x] \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow \forall x(\sim\varphi[x] \vee \psi)\,;$$

selon la bi-implication b. i. on a :

$$\forall x(\sim\varphi[x] \vee \psi) \Leftrightarrow (\forall x \sim\varphi[x] \vee \psi)\,;$$

en vertu de l'intertraductibilité de $\forall$ et de $\exists$, on a :

$$(\forall x \sim\varphi[x] \vee \psi) \Leftrightarrow (\sim\exists x\varphi[x] \vee \psi)\,;$$

en vertu de l'équivalence de $\varphi \Rightarrow \psi$ et de $\sim\varphi \vee \psi$, on a :

$$(\sim\exists x\varphi[x] \vee \psi) \Leftrightarrow (\exists x\varphi[x] \Rightarrow \psi).$$

En remontant la chaîne des équivalences, on a donc :

$$\forall x(\varphi[x] \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\exists x\varphi[x] \Rightarrow \psi).$$

La même démarche permet de justifier c. ii.. Par contre, on voit, toujours en suivant la même démarche, que lorsque $\varphi[x]$ est le *conséquent* de l'implication, le quantificateur n'a pas à être changé.

Une même variable libre figure dans les deux membres des conjonctions, disjonctions et implications

On a vu précédemment qu'il y a une certaine "connivence" (logique !) entre le quantificateur universel et la conjonction, ainsi qu'entre le quantificateur existentiel et la disjonction. On retrouve cette "connivence" dans les lois suivantes dans lesquelles, cette fois-ci, la même variable x, par ex., figure libre dans les deux membres des conjonctions et disjonctions. Leur validité se comprend quasiment de soi.

e. $\forall x(\varphi[x] \wedge \psi[x]) \Leftrightarrow (\forall x\varphi[x] \wedge \forall x\psi[x])$
f. $(\forall x\varphi[x] \vee \forall x\psi[x]) \Rightarrow \forall x(\varphi[x] \vee \psi[x])$ (la réciproque n'est pas valide)
g. $\forall x(\varphi[x] \Rightarrow \psi[x]) \Rightarrow (\forall x\varphi[x] \Rightarrow \forall x\psi[x]$ (la réciproque n'est pas valide)

h. $\exists x(\varphi[x] \vee \psi[x]) \Leftrightarrow (\exists x\varphi[x] \vee \exists x\psi[x])$
i. $\exists x(\varphi[x] \wedge \psi[x]) \Rightarrow (\exists x\varphi[x] \wedge \exists x\psi[x])$ (la réciproque n'est pas valide)
j. $(\exists x\varphi[x] \Rightarrow \exists x\psi[x]) \Rightarrow \exists x(\varphi[x] \Rightarrow \psi[x])$ (la réciproque n'est pas valide)

Mise en forme prénexe. Les "règles de passage" ci-dessus permettent de mettre les formules sous deux formes différentes selon que l'on lit les bi-implications de gauche à droite ou de droite à gauche. Dans le premier cas, on "entre" les quantificateurs au plus près des sous-formules sur lesquelles ils portent ; dans le deuxième cas, on fait "sortir" les quantificateurs en les mettant en tête de la formule toute entière. Une formule dont tous les quantificateurs sont placés en tête, est dite *en forme prénexe*. La suite des quantificateurs qui vient en tête d'une formule en forme prénexe, est appelée le *préfixe* de la formule. On peut toujours mettre une formule en forme prénexe, les deux formules étant équivalentes.

Exemple : mise en forme prénexe de la formule correspondant au syllogisme en *Darii* (prendre garde au parenthésage).

$[\forall x(Mx \Rightarrow Px) \wedge \exists y(Sy \wedge My)] \Rightarrow \exists z(Sz \wedge Pz)$

$\underline{\forall x}[(Mx \Rightarrow Px) \wedge \exists y(Sy \wedge My)] \Rightarrow \exists z(Sz \wedge Pz)$ par a. i.

$\forall x, \underline{\exists y}[(Mx \Rightarrow Px) \wedge (Sy \wedge My)] \Rightarrow \exists z(Sz \wedge Pz)$ par a. ii.

$\underline{\exists x}\{\exists y[(Mx \Rightarrow Px) \wedge (Sy \wedge My)] \Rightarrow \exists z(Sz \wedge Pz)\}$ par c. ii.

$\exists x, \underline{\forall y}\{[(Mx \Rightarrow Px) \wedge (Sy \wedge My)] \Rightarrow \exists z(Sz \wedge Pz)\}$ par c. i.

$\exists x, \forall y, \underline{\exists z}\{[(Mx \Rightarrow Px) \wedge (Sy \wedge My)] \Rightarrow (Sz \wedge Pz)\}$ par d. ii.

Remarque importante : l'ordre dans lequel on a procédé est arbitraire en ce sens que l'on aurait pu, par exemple, commencer par "sortir" le quantificateur en z (conséquent de l'implication principale), avant de "sortir" les quantificateurs de l'antécédent. Le résultat final en aurait été modifié : "$\exists z$" aurait alors été en tête du préfixe :

$$\exists z, \exists x, \forall y\{[(Mx \Rightarrow Px) \wedge (Sy \wedge My)] \Rightarrow (Sz \wedge Pz)\}$$

De la même manière, on aurait pu "sortir" les quantificateurs dans l'antécédent dans un autre ordre, etc. Il en résulte que l'ordre des quantificateurs dans le préfixe est indifférent. On verra dans un avenir proche que cela n'est pas le cas lorsque l'on a affaire à des lettres de prédicat à *deux places ou plus* : ce n'est que dans le calcul des prédicats *monadiques* que l'ordre des quantificateurs dans le préfixe d'une formule en forme prénexe est indifférent.

A Abrégé de syllogistique

A.1 Termes

A.1.1 Prédicables ; arbre de Porphyre

Définitions

Un *prédicable* est "ce qui par nature, peut être dit de plusieurs" (ce qui distingue un prédicable d'un *universel* qui, lui, est "ce qui par nature, peut être en plusieurs" [21]).

La tradition, depuis Porphyre [22], distingue cinq prédicables : le *genre*, l'*espèce*, la *différence* (*espèce* et *différence* ne sont pas chez Aristote et prennent la place de la *définition* chez lui), le *propre* et l'*accident*.

1. Le *genre* est ce qui est prédiqué essentiellement de plusieurs choses différant spécifiquement : animal est prédiqué de cheval, d'homme et de lion, qui diffèrent spécifiquement [23].

   On distingue dix *genres suprêmes* qui sont les dix *catégories* d'Aristote (dans l'ordre de Pierre d'Espagne) : substance, quantité, relation, qualité, action, passion, le lieu, le temps, la position, l'habitude, l'avoir. Ils ne sont subordonnés à aucun genre supérieur (l'*être*, n'est pas un genre, vieille thèse d'Aristote : l'être ne se dit des dix genres suprêmes que de manière équivoque).

   Par ailleurs, sous les genres suprêmes se trouvent des genres *subalternes*, qui sont également espèces relativement à un genre supérieur : *animal* est le genre d'*homme* et espèce de *corps animé*.

2. L'*espèce* est ce qui est prédiqué de plusieurs différant numériquement en tant que ce qu'il est (*in eo quod quid est*) (mais cela ne vaut que pour les espèces dernières). Ou encore : l'*espèce* est ce de quoi un genre est prédiqué en tant que ce qu'il est (*in eo quod quid est*).

   On distingue les *espèces dernières* ou *spécialissimes* des espèces *sublaternes* : sous les premières ne tombent que des individus particuliers, comme l'espèce *homme* sous laquelle ne tombent que des individus comme Socrate, Platon, Ciceron. Les espèces subalternes sont genres relativement à des espèces inférieures.

---

21. Petrus Hispanicus, *Tractatus*, p.17 ; cette distinction entre prédicable et universel, i.e. entre le prédicable qui est dit de quelque chose et ce que "désigne" ou signifie le prédicable (sc. un universel) est évidemment sujette à controverse ; un nominaliste comme Occam récuse cette distinction. D'après certains historiens, Petrus Hispanicus (Pierre d'Espagne) serait né vers 1205 et mort en 1277 et ne serait autre que le pape Jean XXI, dont le pontificat ne dura que 8 mois (15 sept. 1276 - 20 mai 1277). Il aurait écrit son traité de logique (*Tractatus*) dans les années 1230. Cette identification de l'auteur du *Tractatus* au pape Jean XXI a été récusée par d'autres historiens, mais toujours est-il que son *Traité* connut une grande fortune et fut utilisé pendant des siècles comme manuel dans les Universités.

22. Porphyre (234-305 ap. J.C.) est l'éditeur des *Ennéades* de Plotin et a composé une Introduction (*Isagogè*) aux *Catégories* d'Aristote, célèbre pour avoir posé les termes du problème des universaux qui agita un grand nombre de bons esprits au Moyen Age.

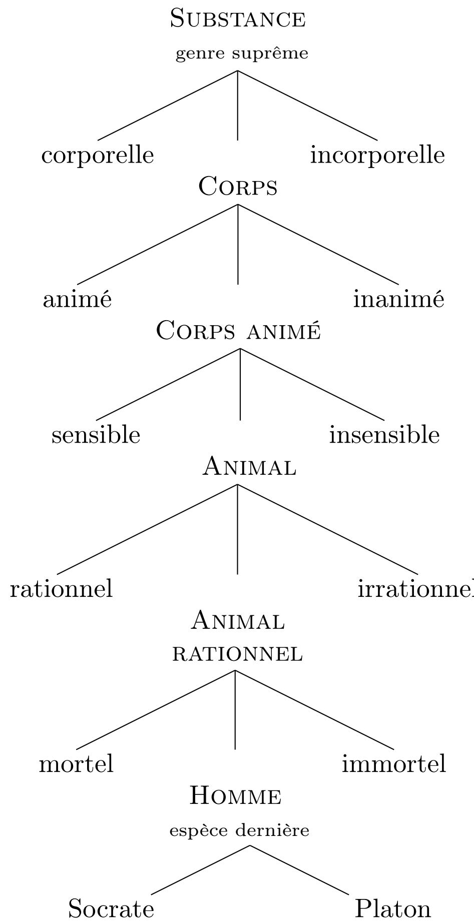
23. En latin cela donne : "Genus est quod predicatur de pluribus differentibus specie in eo quod quid", ce qui traduit la définition d'Aristote, *Topiques*, 102 a 31, rendue ainsi par Tricot : "Le genre est ce qui est attribué essentiellement à des choses multiples et différant spécifiquement entre elles". Cette définition est reprise par Porphyre en 2, 15. "in eo quod quid (est)" est la traduction latine de "$\acute{\epsilon}\nu\ \tau\tilde{\omega}\ \tau\iota\ \acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$". On trouve, par ex., la même formule latine dans la *Somme* I. d'Occam chap. 20, p. 70. *in eo quod quid* est devenu une expression figée.

Ainsi entre les genres suprêmes et les espèces dernières, les genres ou les espèces (subalternes) sont à la fois genres et espèces.

3. La *différence* est ce que l'espèce ajoute au genre sous lequel elle tombe, comme *homme* ajoute *mortel* au genre *animal rationnel*. Un différence *divise* un genre et *constitue* une espèce.

   A la différence du genre ou de l'espèce qui répondent à la question "*in quid*" (qu'est-ce que l'homme ? Réponse : un animal), la différence répond à la question "*in quale*" (comment est l'homme ? Réponse : rationnel). Prédiquer un genre ou une espèce se dit "prédication *in quid*", une différence (mais aussi un propre et un accident) : "prédication *in quale*".

   On représente habituellement cette hiérarchie des genres et de espèces (depuis un genre suprême jusqu'à une espèce dernière et même jusqu'aux individus qui tombent sous cette espèce), ainsi que les différences qui permettent de passer des premiers aux secondes sous la forme d'un arbre, dit *arbre de Porphyre* :



   Les différences constitutives des espèces sont à gauche (un esprit perspicace notera l'absurdité des deux dernières lignes !)

4. Le *propre* se prend en quatre sens :

- ce qui est dans une seule espèce mais pas dans toute, comme *médecin* est dans *homme*, mais pas dans tout homme (ce que l'on pourrait exprimer par : seuls les hommes peuvent être médecins).

- ce qui est dans tout mais pas seulement (*in omni sed non soli*), comme *bipède* est dans tout *homme* mais pas seulement dans l'homme (cf. les coqs).

- ce qui est *in omni et soli* mais pas toujours, comme de grisonner à mesure que l'on vieillit.

- ce qui est *in omni et soli et semper*, comme l'aptitude à rire (*risibile*) dans l'homme. C'est ce quatrième sens qui est le sens "propre" (!) du propre et que l'on définit ainsi, en suivant Aristote *Topiques* 1, 5 : le propre est ce qui est dans une seule espèce, est réciproquable avec la chose et n'indique pas ce qu'elle est (*quid est esse*). Réciproquable signifie que l'on peut aussi bien dire : "tous les hommes sont aptes à rire", que "tous ceux qui sont aptes à rire sont des hommes".

5. L'*accident* est qui est, ou n'est pas, dans une chose de manière contingente, comme *blanc* ou *assis* est dans l'homme.

   On distingue classiquement les accidents *séparables*, des accidents *inséparables* : les premiers sont comme ceux des exemples précédents, les seconds sont comme *noir* dans *corbeau* (i.e. tous les corbeaux sont noirs, mais ce n'est pour autant que "noir" est une propriété essentielle des corbeaux : un corbeau pourrait être vert ou rouge, sans cesser d'être corbeau) ou dans *Ethiopien*

A.1.2 Les prédicaments (catégories)

La doctrine des prédicables porte sur la relation prédicative : comment un prédicat se rapporte-t-il à un sujet ? La doctrine des prédicaments (ou catégories) se rapporte à ce que signifie en eux-mêmes les termes (qui entrent dans un jugement). Pour l'essentiel, les exposés de cette doctrine ne font que résumer les *Catégories* d'Aristote, et n'ont que peu d'intérêt logique : s'agit-il de grammaire ou d'ontologie ? La liste en est fournie ci-dessus (cf. les genres suprêmes), inutile d'insister.

A.2 Jugements et carré des oppositions

Pour Aristote, et toute la tradition qui le suit, tout *jugement* (ou *proposition*) *catégorique*[24] se compose de deux *termes*, le terme *sujet* et le terme *prédicat*. Un jugement consiste à dire quelque chose (exprimé par le prédicat) de quelque chose (exprimé par le sujet) : "le sujet est ce dont il est dit quelque chose, le prédicat est ce qui est dit d'une autre chose" (Pierre d'Espagne, *Tractatus*, p. 4). On peut donc représenter la forme commune à tout jugement sous la forme : $S — P$. La liaison entre les deux termes s'exprime (en français) par le verbe *être* qui sert de *copule*.

Lorsque le verbe "être" n'est pas explicitement présent dans la proposition, comme dans "l'homme court (*homo currit*)" il convient de le rétablir, ce qui donne : "l'homme est courant (*homo est currens*)".

24. On distingue classiquement deux types de jugements (ou propositions), les *catégoriques* et les *hypothétiques*. Ces derniers sont composés de deux catégoriques reliés soit par "ou" (disjonction, exclusive, la plupart du temps), "et" (conjonction) et "si. . .alors. . ." (conditionnel). La syllogistique en sens étroit ne prend en compte que les catégoriques, mais les hypothétiques sont sommairement étudiés dans la lignée du traité de Boèce *De hypotheticis syllogismis*. Les syllogismes dits "hypothétiques" entrent dans le cadre de l'actuel calcul des propositions.

On distingue tout d'abord quatre types de jugement : les universels, les particuliers, les indéfinis (*homo currit*, spécifique au latin) et les singuliers (*Sortes currit*, Socrate court). Ces deux derniers types n'entrent pas directement dans la syllogistique ; la question est de savoir s'il faut les traiter comme des universels ou des particuliers.

La division importante est donc entre les jugements universels et les particuliers [25] : on peut affirmer que le prédicat P vaut de *tout* S, ou seulement, de *quelque* S. Dans le premier cas, le jugement est *universel*, dans le second, il est *particulier* ; on appelle l'universel et le particulier, la *quantité* d'un jugement, quantité qui est donc déterminée par le fait que le sujet est pris soit universellement, ce que marque un signe d'universalité comme "tout", soit particulièrement, ce que marque un signe de particularité comme "quelque" : *tout homme est raisonnable* / *quelque homme est juste*. On verra un peu plus loin comment établir la quantité du terme en position de prédicat.

On divise ensuite les jugements en *affirmatifs* et *négatifs* : on peut affirmer P de S, ou au contraire, nier P de S, ce qui s'expriment respectivement par la copule et par la copule accompagnée d'une marque de négation ; en français cela donne : S est P / S n'est pas P. On appelle l'affirmation et la négation, *qualité* du jugement.

Tout jugement a donc une *quantité* (universel / particulier) et une *qualité* (affirmatif / négatif). Si l'on croise ces deux caractéristiques, les jugements peuvent donc avoir quatre formes différentes, traditionnellement notées par les quatre voyelles **A**, **E**, **I** et **O**.

- **A**, universel affirmatif : "tout vicieux est esclave" (tout S est P).
- **E**, universel négatif : "nul vicieux n'est heureux" (nul S n'est P).
- **I**, particulier affirmatif : "quelque vicieux est riche" (quelque S est P).
- **O**, particulier négatif : "quelque vicieux n'est pas riche" (quelque S n'est pas P) [26].

A.2.1 Carré des oppositions.

D'après ce qui précède, on peut donc former avec les mêmes deux termes (sujet et prédicat) quatre jugements différents ; ces jugements entretiennent des relations logiques qui sont synthétisées dans le classique *carré des oppositions* que tout étudiant sérieux doit connaître par cœur et qui prend la forme suivante :

25. Dans ce qui suit, on ne considérera donc que des jugements dont les deux termes sont *généraux* ou *communs*, comme "homme", "grenouille" ou "arbre". Aristote dans les *Premiers Analytiques* ne considérait pas les jugements singuliers ; on verra bientôt pourquoi. Mais les médiévaux ne se privaient pas de le faire.

26. Nous empruntons ces exemples d'une haute moralité à la *Logique* dite de Port Royal, II, iii.

Aff**I**rmo		n**E**g**O**
A Tout S est P universel affirmatif	$\longleftarrow$ contrariété $\longrightarrow$	**E** Nul S n'est P universel négatif
subalternation $\downarrow$	$\nwarrow$ $\nearrow$ contradiction $\swarrow$ $\searrow$	subalternation $\downarrow$
I Quelque S est P particulier affirmatif	$\longleftarrow$ subcontrariété $\longrightarrow$	**O** Quelque S n'est pas P particulier négatif

– **A** et **O**, tout comme **E** et **I**, sont *contradictoires* : **A** (resp. **E**) et **O** (resp. **I**) ne peuvent ni être vrais ni être faux simultanément.
– **A** est *contraire* de **E** (et réciproquement) : **A** et **E** ne peuvent être vrais simultanément, mais peuvent être faux simultanément.
– **I** est *subcontraire* de **O** (et réciproquement) : **I** et **O** ne peuvent être faux simultanément, mais peuvent être vrais simultanément.
– **I** est *subalterne* de **A**, tout comme **O** l'est de **E** : si **A** (resp. **E**) est vrai alors **I** (resp. **0**) l'est également et si **I** (resp. **O**) est faux alors **A** (resp. **E**) l'est également.

Ainsi, par ex. : "tout homme est sage" *implique* "quelque homme est sage", *contredit* "quelque homme n'est pas sage", et *est contraire de* "aucun homme n'est sage".

Ces relations peuvent se représenter à l'aide des connecteurs propositionnels ainsi :

– Contradiction : **A** w **O** et **E** w **I** sont toujours vrais.
– Contrariété : $\sim$(**A** $\wedge$ **E**), ou plus simplement : **A** $\uparrow$ **E** est toujours vrai.
– Subcontrariété : **I** $\vee$ **O** est toujours vrai.
– Subalternation : **A** $\Rightarrow$ **I** et **E** $\Rightarrow$ **O** ; $\sim$**I** $\Rightarrow\sim$**A** et $\sim$**O** $\Rightarrow\sim$**E**, sont toujours vrais.

Voici, par ex. comment, classiquement, on raisonnait en exploitant le carré des oppositions : Si le jugement *tout homme est raisonnable* est vrai, alors son contradictoire, *quelque homme n'est pas raisonnable* est faux d'où, puisque la fausseté remonte, *aucun homme n'est raisonnable* est faux et donc son contradictoire, *quelque homme est raisonnable* est vrai. D'où : si le jugement *tout homme est raisonnable* est vrai, alors son subalterne, *quelque homme est raisonnable* est vrai.

ATTENTION : Seule la relation de contradiction entre **A** et **O** et entre **E** et **I** est valide dans la logique contemporaine. Les autres ne le sont qu'en ajoutant une prémisse.

A.2.2 Règles de conversion.

La tradition appelle *conversion d'un jugement* (ou d'une *proposition*) le fait d'intervertir les termes dans un jugement en en préservant la vérité ; cela peut se faire sans changement ni de la qualité ni de la quantité du jugement (*conversion simple*) ou, au contraire, en en changeant la quantité (*conversion partielle* ou *par accident*). On peut également convertir un jugement sans changement ni de la qualité ni de la quantité, mais en transformant les termes *définis* en termes *indéfinis* (i.e. par ex. en transformant "animal" en "non-animal", ou "blanc" en "non-blanc", *conversion par contraposition*). Les règles qui président à cette opération sont les suivantes :

– Tout S est P (**A**) $\rightarrow$ Quelque P est S (**I**) : conversion *partielle* : si "tout S est P" est vrai, alors "quelque P est S" est vrai ; la réciproque ne vaut évidemment pas.

– Tout S est P (**A**) $\leftrightarrow$ Tout non-P est non-S : conversion *par contraposition* : "Tout S est P" est vrai si et seulement si "Tout non-P est non-S" est vrai.

– Nul S n'est P (**E**) $\leftrightarrow$ Nul P n'est S (**E**) : conversion *simple* : "nul S n'est P" est vrai si et seulement si "nul P n'est S" est vrai.

– Quelque S est P (**I**) $\leftrightarrow$ Quelque P est S (**I**) : conversion *simple* : "quelque S est P" est vrai si et seulement si "quelque P est S" est vrai.

– Quelque S n'est pas P (**O**) ne se convertit ni simplement ni partiellement ; toutefois :
– Quelque S n'est pas P (**O**) $\rightarrow$ Quelque non-P n'est pas non-S : conversion *par contraposition*[27].

On appelle parfois ces règles de conversion, des règles d'inférence *immédiate* : elles permettent de passer d'un jugement à un autre directement, sans jugement intermédiaire. Toutefois, l'essentiel de la logique classique concerne les règles d'inférence *médiate*, à savoir les *syllogismes*.

A.3 Syllogismes : figures et modes concluants.

Comme on l'a vu, un jugement, très généralement, lie un prédicat à un sujet ("une chose est une autre chose" comme dit la *L. PR.*) ou sépare un prédicat d'une sujet ("une chose n'est pas une autre"). La question est de savoir ce qui rend légitime l'affirmation ou la négation de cette liaison du prédicat au sujet : cela peut être tout simplement l'observation (ou "l'intuition" ?), mais cela peut-être aussi le fait de tenir pour vrais plusieurs autres jugements. Le cas le plus simple, et auquel tous les autres se ramènent, est celui dans lequel on n'a affaire qu'à deux autres jugements. Il apparaît, en effet, que puisque la question est de savoir pourquoi on peut légitimement affirmer ou nier la liaison entre deux termes (S et P), il s'agit de trouver un terme intermédiaire (M) auquel les deux premiers sont liés ou dont ils sont séparés. On peut représenter cela par le schéma très général suivant[28] :

27. Attention : ce sens de *contraposition* n'est pas tout à fait le même que celui qu'a ce terme dans la logique contemporaine.

28. Cette présentation (que certains historiens attribuent à Pascal, mais cela est très discuté) s'inspire de celle qui est faite dans une première version de la *Logique* de Port Royal

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & / & & \backslash & \\ S & & \leftarrow - - ? - - \rightarrow & & P \end{array}$$

Les deux éventuelles liaisons S — M et M—P sont exprimées par deux jugements qui constituent les *prémisses* d'un syllogisme alors que le jugement exprimant la liaison S—P en est la *conclusion*. On peut alors caractériser formellement un syllogisme comme suit [29] :

Un syllogisme est constitué de deux prémisses, - la *majeure* et la *mineure* - et d'une *conclusion*.

Dans la majeure, figure le terme qui est prédicat dans la conclusion (dit *terme majeur* ou *grand terme*) et un terme, - le *moyen terme* - qui figure également dans la mineure, mais pas dans la conclusion.

Dans la mineure, figure le terme qui est sujet dans la conclusion (dit *terme mineur* ou *petit terme*) et le moyen terme [30].

Si l'on représente par S le petit terme, P le grand terme et M le moyen terme, un syllogisme a la forme :

$$\begin{array}{c} \mathrm{M/P} \\ \mathrm{M/S} \\ \hline \mathrm{S — P} \end{array}$$

A.3.1 Figures des syllogismes.

Alors que la conclusion est toujours de la forme S—P, dans les prémisses, P, S et M peuvent être soit en position de sujet, soit en position de prédicat, ce qui donne les quatre *figures* des syllogismes [31] :

1ère figure	2ème figure	3ème figure	(4ème figure)
M—P	P—M	M—P	P—M
S—M	S—M	M—S	M—S
S—P	S—P	S—P	S—P

A.3.2 Modes concluants.

D'un point de vue purement combinatoire, la majeure, la mineure ainsi que la conclusion pourraient être **A** ou **I** ou **E** ou **O**, ce qui donne dans chaque figure 64 combinaisons différentes (**A-A-A**, **A-A-I**, . . ., **E-A-I**,. . ., **O-O-O**) et donc 192 combinaisons pour les trois premières figures.

29. Définition traditionnelle d'un syllogisme : "Un syllogisme est une énonciation (*oratio*, discours) dans laquelle certaines choses étant posées, une autre s'ensuit (*accidere*) nécessairement en vertu de celles qui sont posées" (Pierre d'Espagne, *op. cit.* p. 43). Il s'agit d'une traduction plus ou moins fidèle de la définition d'Aristote en 24b 18 des *Premiers Analytiques* : "Le syllogisme est un discours dans lequel, certaines choses étant posées, quelque chose d'autre que ces données en résulte nécessairement par le seul fait de ces données."

30. On verra dans l'annexe A qu'une autre définition des termes, majeur et mineur, fut parfois adoptée.

31. Pour d'obscures raisons qui ont fait couler des litres d'encre de la part des commentateurs, Aristote n'envisage pas la 4ème figure alors qu'il n'y aucune raison formelle de l'exclure ; toutefois, par respect pour le vieux maître, on ne considérera la 4ème figure qu'en annexe à cet exposé.

Certaines seulement de ces 192 combinaisons sont d'authentiques syllogismes, appelés *modes concluants*. Pour l'essentiel, il y a 14 modes concluants dans les trois premières figures (il y a 5 autres modes concluants dans la 4ème figure qu'Aristote, comme on l'a dit, n'envisage pas).

Pour établir quels sont les modes concluants, la tradition, au Moyen Age, invoquait un certain nombre de règles, pas toujours les mêmes et sans toujours en faire véritablement usage ; on doit aux auteurs de la *Logique* de Port Royal, d'en avoir donné une liste exhaustive et d'en avoir fait un usage rigoureux. C'est cette liste que l'on donne ici :

1. Le moyen ne peut être pris deux fois particulièrement, il doit être pris au moins une fois universellement.
2. Les termes de la conclusion ne peuvent être pris plus universellement dans la conclusion que dans les prémisses.
3. On ne peut rien conclure de deux prémisses négatives.
4. De deux prémisses affirmatives, on ne peut tirer une conclusion négative.
5. Si l'une des prémisses est négative, la conclusion est négative ; si l'une des prémisses est particulière, la conclusion est particulière.
6. On ne peut rien conclure de deux prémisses particulières.

Remarque importante : Comme on l'a vu, la quantité du terme en position de sujet dans un jugement détermine celle du jugement lui-même et est marquée par la présence de "tout" (ou "nul") ou de "quelque". Dans le premier cas le terme sujet est, dit-on, *pris universellement*, dans le second cas, il est *pris particulièrement*. Pour la quantité du prédicat, les choses sont moins apparentes puisqu'on ne trouve pas ces marques d'universalité ou de particularité.

Toutefois, un instant de réflexion conduit à admettre que :

– dans un jugement *affirmatif* (**A** ou **I**), le terme en position de prédicat est pris *particulièrement*.

– dans un jugement *négatif* (**E** ou **O**), le terme en position de prédicat est pris *universellement*.

Par ex. dans un jugement en **E**, les deux termes sont pris universellement, par contre dans un jugement en **A**, le sujet est pris universellement mais le prédicat est pris particulièrement.

Cette manière de déterminer la quantité d'un terme en position de prédicat, permet d'appliquer les règles 1. et 2. à ces termes (pour les termes en position de sujet, il n'y a pas de problème) : par ex. dans la 2ème figure, le moyen est en position de prédicat dans les deux prémisses ; si donc les deux prémisses étaient affirmatives, le moyen serait pris deux fois particulièrement, ce qui est interdit par la règle 1.. Il faut donc que l'une des prémisses soit négative dans tous les modes concluants de la 2ème figure (la conclusion est alors négative, par la règle 5).

1ère figure.

$$\begin{array}{c} M—P \\ S—M \\ \hline S—P \end{array}$$

En suite des règles ci-dessus, on a :

A. La mineure doit être affirmative.
En effet : supposons la mineure négative. Alors, par la règle 5., la conclusion est négative et, par 3. la majeure est affirmative. Donc P est pris particulièrement dans la majeure et universellement dans la conclusion, ce qui enfreint la règle 2. .

B. La majeure doit être universelle.
En effet : on vient d'établir que la mineure est affirmative et donc M, en position de prédicat, y est pris particulièrement et donc par 1. il doit être pris universellement dans la majeure où il figure en position de sujet.

Si l'on tient compte des points A. et B., et de la règle 5. (qui permet de déterminer, étant donné la forme des prémisses, de quelle forme doit être la conclusion), on a donc les quatre modes concluants suivants[32] :

	B**A**rb**A**r**A**	C**E**l**A**r**E**nt	D**A**r**II**	F**E**r**IO**
universelles	**A**	**E**	**A**	**E**
affirmatives	**A**	**A**	**I**	**I**
	A	**E**	**I**	**O**
	tout M est P	nul M n'est P	tout M est P	nul M n'est P
	tout S est M	tout S est M	quelque S est M	quelque S est M
	tout S est P	nul S n'est P	quelque S est P	quelque S n'est pas P

2ème figure.

$$\begin{array}{c} P—M \\ S—M \\ \hline S—P \end{array}$$

En suite des règles ci-dessus, on a (à démontrer !) :

A. Une des prémisses doit être négatives (la conclusion sera donc toujours négative).
B. La majeure doit être universelle.

Il en résulte les quatre modes concluants suivants :

32. Les noms des syllogismes, pittoresques et amusants, ont une fonction mnémotechnique que l'on expliquera plus bas, p. 53.

C**E**s**A**r**E**

$$\begin{array}{c} \mathbf{E} \\ \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{E} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{nul } P \text{ n'est } M \\ \text{tout } S \text{ est } M \\ \hline \text{nul } S \text{ n'est } P \end{array}$$

C**A**m**E**str**E**s

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{E} \\ \hline \mathbf{E} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{tout } P \text{ est } M \\ \text{nul } S \text{ n'est } M \\ \hline \text{nul } S \text{ n'est } P \end{array}$$

F**E**st**I**n**O**

$$\begin{array}{c} \mathbf{E} \\ \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{O} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{nul } P \text{ n'est } M \\ \text{quelque } S \text{ est } M \\ \hline \text{quelque } S \text{ n'est pas } P \end{array}$$

B**A**r**O**c**O**

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{tout } P \text{ est } M \\ \text{quelque } S \text{ n'est pas } M \\ \hline \text{quelque } S \text{ n'est pas } P \end{array}$$

3ème figure.

$$\begin{array}{c} M\text{—}P \\ M\text{—}S \\ \hline S\text{—}P \end{array}$$

En suite des règles ci-dessus, on a (à démontrer, là encore !) :

A. La mineure doit être affirmative.
B. La conclusion doit être particulière.

Il en résulte les six modes concluants suivants :

D**A**r**A**pt**I**

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{tout } M \text{ est } P \\ \text{tout } M \text{ est } S \\ \hline \text{quelque} S \text{ est } P \end{array}$$

F**E**l**A**pt**O**n

$$\begin{array}{c} \mathbf{E} \\ \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{O} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{nul } M \text{ n'est } P \\ \text{tout } M \text{ est } S \\ \hline \text{quelque } S \text{ n'est pas } P \end{array}$$

D**I**s**A**m**I**s

$$\begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{quelque } M \text{ est } P \\ \text{tout } M \text{ est } S \\ \hline \text{quelque } S \text{ est } P \end{array}$$

D**A**t**I**s**I**

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{tout } M \text{ est } P \\ \text{quelque } M \text{ est } S \\ \hline \text{quelque } S \text{ est } P \end{array}$$

B**O**c**A**rd**O**

$$\begin{array}{c} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{O} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{quelque } M \text{ n'est pas } P \\ \text{tout } M \text{ est } S \\ \hline \text{quelque } S \text{ n'est pas } P \end{array}$$

F**E**r**I**s**O**n

$$\begin{array}{c} \mathbf{E} \\ \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{O} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{nul } M \text{ n'est } P \\ \text{quelque } M \text{ est } S \\ \hline \text{quelque } S \text{ n'est pas } P \end{array}$$

A.3.3 Syllogismes "parfaits" et réduction des syllogismes

Aristote et la tradition considère les syllogismes de la première figure comme étant seuls "parfaits" : ce n'est que dans cette figure que l'on peut conclure dans les quatre types de jugement **A**, **E**, **I**, **O**, alors que dans la deuxième figure on ne peut conclure que négativement et dans la troisième, que particulièrement ; par ailleurs, ce n'est que dans cette figure que le "moyen" est vraiment moyen (!). Pour justifier les syllogismes des deuxième et troisième figures, il faut donc montrer qu'ils peuvent être "réduits" à ceux de la première figure. On peut même considérer que *Barbara* et *Celarent*, sont les seuls véritables modes concluants puisque *Darii* et *Ferio* n'en sont que des particularisations [33].

Si l'on considère *Barbara* et *Celarent*, tous les raisonnements aristotéliciennement admissibles dépendent donc de deux principes :

- *dictum de omni* : ce qui est affirmé d'un terme pris universellement, l'est de tout ce dont est affirmé ce terme (principe de *Barbara*).

- *dictum de nullo* : ce qui est nié d'un terme pris universellement, l'est de tout ce dont est affirmé ce terme (principe de *Celarent*).

Illustration : Soit un *Barbara* (ou un *Darii*) comme : *les navigateurs sont courageux*, or *les Bretons (ou : certains Bretons) sont navigateurs* ; donc *les Bretons (ou : certains Bretons) sont courageux* : "courageux" est affirmé universellement de "navigateurs" qui lui-même est affirmé universellement (ou particulièrement) de "Bretons" donc "courageux" peut être affirmé universellement (*Barbara*), ou particulièrement (*Darii*), de "Bretons".

On peut "réduire" les syllogismes des deuxième et troisième figures à ceux de la première figure en transformant les premiers par conversion (simple ou partielle) d'un ou plusieurs des jugements qui les composent et/ou en permutant les prémisses. Pour savoir comment procéder, il suffit de considérer les noms des syllogismes, car ces noms ont, comme on l'a déjà dit, une valeur mnémotechnique :

- Les voyelles et leur ordre indiquent les types de jugement qui entrent dans le syllogisme (ex. *F<u>e</u>l<u>a</u>pt<u>o</u>n* → majeure **E**, mineure **A** et conclusion O).

- La première lettre des syllogismes (*B, C, D, F*) indique à quels syllogismes de la première figure se réduisent ceux des deuxième et troisième figures.

- La lettre "*s*" indique qu'il faut convertir (simplement) le jugement indiqué par la voyelle (**E** ou **I**, donc) précédant "*s*" immédiatement.

33. C'est pourquoi Kant ne voyait dans cette division des quatre figures qu'une "fausse subtilité".

– La lettre "p" indique qu'il faut convertir (partiellement) le jugement indiqué par la voyelle (**A**, donc) précédant "p" immédiatement.

– La lettre "m" indique que l'on doit permuter les prémisses.

– La lettre "c" à l'intérieur d'un nom indique qu'il faut procéder par l'absurde (cela concerne donc $\textit{Baro\underline{c}o}$ et $\textit{Bo\underline{c}ardo}$).

Exemple : soit *Camestres* : il se réduit à *Celarent* (même première lettre : C). Pour retrouver *Celarent*, il faut convertir simplement la mineure et la conclusion ($\textit{Came\underline{s}tre\underline{s}}$) et permuter les prémisses ($\textit{Ca\underline{m}estres}$) ; on peut représenter les choses ainsi :

$$
\begin{array}{cccccc|c}
\textit{Camestres} & \rightarrow & \text{conversions} & \rightarrow & \text{permutation} & & \textit{Celarent} \\
 & & & & & & \\
\text{tout } P \text{ est } M & & \text{tout } P \text{ est } M & \searrow & \text{nul } M \text{ n'est } S & & \text{nul } M \text{ n'est } P \\
\text{nul } S \text{ n'est } M & \longrightarrow & \text{nul } M \text{ n'est } S & \nearrow & \text{tout } P \text{ est } M & & \text{tout } S \text{ est } M \\
\hline
\text{nul } S \text{ n'est } P & \longrightarrow & \text{nul } P \text{ n'est } S & & \text{nul } P \text{ n'est } S & & \text{nul } S \text{ n'est } P
\end{array}
$$

Le petit terme (sujet de la conclusion) dans *Camestres* devient grand terme (prédicat dans la conclusion) dans *Celarent* et inversement. Puisque *Celarent* est valide, on doit admettre que *Camestres*, qui n'en est qu'une forme déguisée, est également valide. On pourra s'amuser à faire de même avec les autres syllogismes de la deuxième et de la troisième figure.

Toutefois *Baroco* et *Bocardo* ne se réduisent pas ainsi. A défaut de ce mode habituel de réduction par conversion et permutation, on peut cependant les réduire "par l'absurde" à *Barbara* en utilisant une forme élargie de la loi de contraposition : $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \wedge \sim r) \Rightarrow \sim q)]$ (ou : $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(\sim r \ \wedge q) \Rightarrow \sim p)]$) ; en terme d'inférence cela revient à utiliser le fait qu'une inférence de la forme :

$\dfrac{\begin{matrix}\varphi \\ \psi\end{matrix}}{\theta}$ est valide ssi une inférence de la forme : $\dfrac{\begin{matrix}\varphi \\ \sim\theta\end{matrix}}{\sim\psi}$ ou de la forme : $\dfrac{\begin{matrix}\sim\theta \\ \psi\end{matrix}}{\sim\varphi}$

est valide.

Appliqué à *Baroco* cela donne (en se souvenant que "tout S est P" (**A**) est la négation (la contradictoire) de "quelque S n'est pas P" (**O**)) :

$$
\begin{array}{ccl}
\textit{Baroco} & \rightarrow & \quad\textit{Barbara} \\
 & & \\
\text{tout } P \text{ est } M & & \text{tout } P \text{ est } M \\
\text{quelque } S \text{ n'est pas } M & \searrow & \text{tout } S \text{ est } P \quad \text{négation de la conclusion de } \textit{Baroco} \\
\hline
\text{quelque } S \text{ n'est pas } P & \nearrow & \text{tout } S \text{ est } M \quad \text{négation de la mineure de } \textit{Baroco}
\end{array}
$$

Le grand terme dans *Baroco* devient le moyen dans *Barbara* et le moyen dans *Baroco* devient le grand terme dans *Barbara*.

On peut dire qu'il s'agit d'une *réduction à l'absurde* de *Baroco* au sens où si quelqu'un admet les deux prémisses "tout P est M" et "quelque S n'est pas M" mais refuse la conclusion "quelque S n'est pas P", et donc admet sa contradictoire, à savoir : "tout S est P", on lui montre qu'alors il se contredit ; car de la première prémisse "tout P est M" et de cette contradictoire de la conclusion, il suit, par *Barbara*, la contradictoire de la deuxième prémisse qu'il avait pourtant admise : donc il se contredit s'il refuse la conclusion de *Baroco*[34]

Remarque terminale.

Si l'on observe la position des termes, grand, moyen et petit, dans les trois figures officiellement admises par Aristote, on constate que dans chacune d'elles, un même terme est en position de sujet dans l'un des jugements et de prédicat dans un autre : le moyen dans la 1ère figure, le grand terme dans la 2ème et le petit terme dans la 3ème (dans la 4ème les choses sont horribles : tous les termes apparaissent une fois en position de sujet et une fois en position de prédicat !). De plus, la réduction des syllogismes des 2ème et 3ème figures à ceux de la 1ère, font un usage essentiel des règles de conversion, qui supposent qu'un même terme puisse être aussi bien en position de sujet qu'en position de prédicat.

Or Aristote admettait (cf. *Catégories*, 2, 1b 3-5, ainsi que 5, 2a 11-13), ce qui semble tout à fait raisonnable, qu'un terme singulier (nom propre ou description définie) peut bien occuper la position de sujet dans un jugement mais jamais celle de prédicat. C'est pourquoi, il ne pouvait être question pour lui de faire intervenir dans les syllogismes des termes singuliers et donc des jugements singuliers. Le traditionnel exemple de syllogisme que l'on trouve dans la littérature - tous les hommes sont mortels, or Socrate est un homme, *ergo*, Socrate est mortel -, est donc un mauvais exemple[35].

A.4 Modes indirects de la 1ère figure et modes de la 4ème figure

A.4.1 1ère figure, modes indirects

Certains auteurs médiévaux caractérisent les termes, majeur et mineur (ou grand et petit), d'une manière différente de celle qui a été donnée plus haut. C'est en particulier le cas de Pierre d'Espagne[36] qui définit le terme majeur comme celui qui figure avec le moyen dans la première

34. On remarquera que si l'on joint la négation de la conclusion avec la prémisse en O, on peut bien en inférer la contradictoire de l'autre prémisse, mais (moyennant une permutation des nouvelles prémisses) cette inférence se fait en *Bocardo* ! En effet :

Baroco		*Bocardo*
tout P est M	tout S est P	quelque S n'est pas M
quelque S n'est pas M	quelque S n'est pas M	tout S est P
quelque S n'est pas P		quelque P n'est pas M

On pourra s'amuser à constater le même genre de chose avec la réduction de *Bocardo*.

Il faut noter, avec Leibniz, que ce mode de démonstration "par l'absurde" peut être appliqué à tous les syllogismes des 2ème et 3ème figures.

35. Mais Aristote lui-même se rend coupable de la même infraction : à la fin *Premiers Analytiques* il ne se privait pas de prendre des exemples de ce genre ; voir en particulier le cas fameux du syllogisme dit "de Pittacos" en 70a 15 sq. : *Les ambitieux sont libéraux, Pittacos est ambitieux,* ergo : *Pittacos est libéral*

36. *Tractatus*, IV, 2, p. 44

proposition, i.e. la majeure, et le terme mineur comme celui qui figure, avec le moyen, dans la seconde *proposition*, i.e. la mineure.

Cette caractérisation ne se réfère donc pas à la place des termes dans la conclusion : on peut ainsi admettre que, dans la conclusion, le majeur figure en position de sujet et le mineur en position de prédicat. Si tel est le cas on dit que l'on a affaire à un mode *indirect*. Les modes "indirects" de la première figure furent introduits dès l'antiquité par Théophraste, le successeur d'Aristote à la tête du Lycée.

Pierre d'Espagne. en dresse la liste en montrant comment ils peuvent être "prouvés" à partir des modes "directs" de la première figure. Voici les cinq modes indirects de la première figure :

B**A**r**A**l**I**pton	C**E**l**A**nt**E**s	D**A**b**I**t**I**s	F**A**p**E**sm**O**
A	**E**	**A**	**A**
A	**A**	**I**	**E**
I	**E**	**I**	**O**
tout M est P	nul M n'est P	tout M est P	tout M est P
tout S est M	tout S est M	quelque S est M	nul S n'est M
quelque P est S	nul P n'est S	quelque P est S	quelque P n'est pas S

Fr**I**s**E**s**O**morum

$$\frac{\begin{array}{c}\mathbf{I}\\\mathbf{E}\end{array}}{\mathbf{O}}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\text{quelque } M \text{ est } P\\\text{nul } S \text{ n'est } M\end{array}}{\text{quelque } S \text{ n'est pas } P}$$

A.4.2 "Preuve" / "réduction" de ces modes "indirects" par les / aux modes "directs"

1. Pour les trois premiers, *Baralipton, Celantes* et *Dabitis*, il suffit de remarquer que leur conclusion est obtenue par conversion, "par accident" pour *Baralipton* et "simple" pour les deux autres, à partir des modes correspondant, à savoir *Barbara, Celarent* et *Darii* ; on ne change rien aux prémisses.

   Comme *Baralipton* conclut particulièrement, on ne peut, à vrai dire, le "réduire" à *Barbara*, mais on peut le "prouver" par *Barbara*.

   On peut présenter les choses ainsi :

$$\begin{array}{ccc}
\textit{Barbara} & & \textit{Baralipton} \\
\\
\text{Tout } M \text{ est } P & & \text{Tout } M \text{ est } P \\
\text{Tout } S \text{ est } M & & \text{Tout } S \text{ est } M \\
\cline{1-1}\cline{3-3}
\text{Tout } S \text{ est } P & \xrightarrow{\text{conversion partielle}} & \text{Quelque } P \text{ est } S
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\textit{Celarent} & & \textit{Celantes} \\
\\
\text{Aucun } M \text{ n'est } P & & \text{Aucun } M \text{ n'est } P \\
\text{Tout } S \text{ est } M & & \text{Tout } S \text{ est } M \\
\cline{1-1}\cline{3-3}
\text{Aucun S n'est P} & \xleftrightarrow{\text{conversion simple}} & \text{Aucun } P \text{ n'est } S
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\textit{Darii} & & \textit{Dabitis} \\
\\
\text{Tout } M \text{ est } P & & \text{Tout } M \text{ est } P \\
\text{Quelque } S \text{ est } M & & \text{Quelque } S \text{ est } M \\
\cline{1-1}\cline{3-3}
\text{Quelque } S \text{ est } P & \xleftrightarrow{\text{conversion simple}} & \text{Quelque } P \text{ est } S
\end{array}$$

2. Pour les deux autres, *Fapesmo* et *Fresisomorum* les choses sont plus compliquées puisque l'on ne peut les obtenir simplement par conversion de la conclusion de *Ferio*, une proposition en **O** étant inconvertible. Pour obtenir l'interversion des termes sujet et prédicat dans la conclusion, il faut tout d'abord convertir, partiellement ou simplement, les prémisses puis les transposer, ce que l'on peut représenter ainsi (en allant des indirects à *Ferio*, de gauche à droite) :

$$\begin{array}{ccccc}
\textit{Fapesmo} & & & & \textit{Ferio} \\
\\
\text{Tout } M \text{ est } P & \xrightarrow{\text{conversion partielle}} & \text{Quelque } P \text{ est } M & \searrow & \text{Aucun } M \text{ n'est S} \\
\text{Aucun } S \text{ n'est } M & \xrightarrow{\text{conversion simple}} & \text{Aucun } M \text{ n'est } S & \nearrow & \text{Quelque } P \text{ est } M \\
\cline{1-1}\cline{5-5}
\text{Quelque } P \text{ n'est pas } S & & & & \text{Quelque } P \text{ n'est pas } S
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\textit{Frisesomorum} & & & & \textit{Ferio} \\
\text{Quelque } M \text{ est } P & \xleftrightarrow{\text{conversion simple}} & \text{Quelque } P \text{ est } M & \searrow & \text{Aucun } M \text{ n'est } S \\
\text{Aucun } S \text{ n'est } M & \xleftrightarrow{\text{conversion simple}} & \text{Aucun } M \text{ n'est } S & \nearrow & \text{Quelque } P \text{ est } M \\
\cline{1-1}\cline{5-5}
\text{Quelque } P \text{ n'est pas } S & & & & \text{Quelque } P \text{ n'est pas } S
\end{array}$$

A.5 Les modes de la 4ème figure

Cette 4ème figure, qu'Aristote n'envisageait pas, fut, dit-on, introduite par Galien [37] mais elle continua à susciter débats et oppositions tout au long du Moyen Age et de la Renaissance.

37. Galien vivait au 1er siècle ap. J.C. ; il est surtout connu pour son immense œuvre médicale, mais c'était un esprit encyclopédique.

Les règles spécifiques à cette figure (que l'on pourra s'amuser à prouver à partir des règles générales) sont les suivantes :

1. Si la majeure est affirmative (**A** ou **I**), la mineure doit être universelle (**A** ou **E**).
2. Si la mineure est affirmative (**A** ou **I**), la conclusion est particulière (**I** ou **O**).
3. Si la conclusion est négative (**E** ou **O**), la majeure est universelle (**A** ou **E**).

Si l'on croise ces différentes conditions entre elles et avec les règles générales, on obtient les cinq modes concluants suivants :

Br**A**m**A**nt**I**p

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{tout } P \text{ est } M \\ \text{tout } M \text{ est } S \\ \hline \text{quelque } S \text{ est } P \end{array}$$

C**A**me**E**n**E**s

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{E} \\ \hline \mathbf{E} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{tout } P \text{ n'est } M \\ \text{nul } M \text{ n'est } S \\ \hline \text{nul } S \text{ n'est } P \end{array}$$

D**I**m**A**r**I**s

$$\begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{quelque } P \text{ est } M \\ \text{tout } M \text{ est } S \\ \hline \text{quelque } S \text{ est } P \end{array}$$

F**E**s**A**po**O**

$$\begin{array}{c} \mathbf{E} \\ \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{O} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{nul } P \text{ n'est } M \\ \text{tout } M \text{ est } S \\ \hline \text{quelque } S \text{ n'est pas } P \end{array}$$

Fr**E**s**I**s**O**n

$$\begin{array}{c} \mathbf{E} \\ \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{O} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{nul } P \text{ n'est } M \\ \text{quelque } M \text{ est } S \\ \hline \text{quelque } S \text{ n'est pas } P \end{array}$$

Un lecteur un peu attentif ne peut manquer d'avoir remarqué l'étroite similitude entre ces modes de la 4ème figure et ceux, "indirects", de la 1ère figure. Il apparaît, en effet, que seul l'ordre des prémisses est changé lorsque l'on passe des uns autres selon le tableau suivant :

Tableau comparatif des modes indirects de la 1ère figure et des modes de la 4ème figure.

	Modes indirects de la 1ère figure		Modes de la 4ème figure
	B**A**r**A**l**I**pton		Br**A**m**A**nt**I**p
A	tout M est P	**A**	tout P est M
A	tout S est M	**A**	tout M est S
I	quelque P est S	**I**	quelque S est P
	C**E**l**A**nt**E**s		C**A**m**E**n**E**s
E	nul M n'est P	**A**	tout P est M
A	tout S est M	**E**	nul M n'est S
E	nul P n'est S	**E**	nul S n'est P
	D**A**b**I**t**I**s		D**I**m**A**r**I**s
A	tout M est P	**I**	quelque P est M
I	quelque S est M	**A**	tout M est S
I	quelque P est S	**I**	quelque S est P
	F**A**p**E**sm**O**		F**E**s**A**p**O**
A	tout M est P	**E**	nul P n'est M
E	nul S n'est M	**A**	tout M est S
O	quelque P n'est pas S	**O**	quelque S n'est pas P
	Fr**I**s**E**s**O**morum		Fr**E**s**I**s**O**n
I	quelque M est P	**E**	nul P n'est M
E	nul S n'est M	**I**	quelque M est S
O	quelque P n'est pas S	**O**	quelque S n'est pas P

Pour faire apparaître mieux encore l'étroite parenté entre les modes indirects et les modes de la 4ème figure, on remplace dans les modes indirects, P et S par A et B respectivement, et, dans les modes de la 4ème figure, P et S par B et A respectivement. Il apparaît alors avec une parfaite clarté que la seule différence entre les modes indirects et les modes de la 4ème figure ne tient bien qu'à l'ordre des prémisses, ce qui est logiquement insignifiant.

Modes indirects de la 1ère figure

B**A**r**A**l**I**pton

A	tout M est A
A	tout B est M
I	quelque A est B

C**E**l**A**nt**E**s

E	nul M n'est A
A	tout B est M
E	nul A n'est B

D**A**b**I**t**I**s

A	tout M est A
I	quelque B est M
I	quelque A est B

F**A**p**E**sm**O**

A	tout M est A
E	nul B n'est M
O	quelque A n'est pas B

Fr**I**s**E**s**O**morum

I	quelque M est A
E	nul B n'est M
O	quelque A n'est pas B

Modes de la 4ème figure

Br**A**m**A**nt**I**p

A	tout B est M
A	tout M est A
I	quelque A est B

C**A**m**E**n**E**s

A	tout B est M
E	nul M n'est A
E	nul A n'est B

D**I**m**A**r**I**s

I	quelque B est M
A	tout M est A
I	quelque A est B

F**E**s**A**p**O**

E	nul B n'est M
A	tout M est A
O	quelque A n'est pas B

Fr**E**s**I**s**O**n

E	nul B n'est M
I	quelque M est A
O	quelque A n'est pas B

De ces modes, indirects ou de la 4ème figure, les paires *Baralipton* / *Bramantip* et *Fapesmo* / *Fesapo* ne sont pas valides, puisque l'on est dans le cas ; prémisses universelles / conclusion particulière, cas que l'on rencontrait déjà avec *Darapti* et *Felapton* de la 3ème figure

Par contre, *Frisesomorum* est parfaitement valide, contrairement à ce que dit Couturat, ainsi donc que *Fresison.*

On remarque cependant que du point de vue des classiques, les modes indirects de la première figure en F ne devraient pas être admis sans réticence puisqu'ils ont tous les deux des mineures négatives, ce qui contrevient à l'une des règles spécifiques de la 1ère figure, et, plus même, que *Frisesomorum* contrevient à l'autre règle spécifique de la même figure puisque la majeure y est particulière. Ils ne sont donc pas vraiment de la 1ère figure.

A.6 Manipulations diverses

Comme on le voit dans le cas des indirects de la 1ère figure en B, C et D, ceux-ci sont obtenus directement à partir de leur correspondant direct, par simple conversion des conclusions de ces derniers. Rien ne semble donc interdire que l'on fasse subir aux conclusions des autres syllogismes, ce même genre de manipulation, soit que l'on convertisse les conclusions, soit que l'on passe aux subalternes des conclusions. On obtient alors un nombre sensiblement plus élevé de modes concluants dans les diverses figures : 12 modes concluants dans la 1ère figure (en comptant les indirects ci-dessus et donc leur correspondant dans la 4ème figure), 10 dans la 2ème et 9 dans la 3ème, ce qui fait un total de 31 modes concluants.

S'il n'est guère intéressant de prendre en compte les 12 qui n'appartiennent pas à l'une des quatre figure (en admettant les cinq de la 4ème), c'est que les nouvelles conclusions obtenues par conversion sont soit plus faibles que les conclusions originales (cas de la conversion partielle de *Barbara* → *Barbari*), soit strictement équivalentes (cas de la conversion simple). Les nouvelles conclusions obtenues par subalternation sont, elles toujours plus faibles que les conclusions originales et comme le disent les auteurs de la *Logique* de Port Royal (III, iii, 6ème Corollaire) "...il a plu aux hommes de ne considérer les espèces de syllogismes que selon sa plus noble conclusion qui est la générale : de sorte qu'on ne compte point pour une espèce particulière de syllogisme celui où on ne conclut le particulier que parce qu'on en peut aussi conclure le général."

B Démonstration des syllogismes dans leur transcription actuelle.

Sur le modèle de la démonstration de la transitivité de l'inclusion (ce qui correspond au *Barbara*), on peut s'amuser à démontrer les 12 syllogismes valides sur les 14 retenus par Aristote (Rappel : les deux syllogismes de la troisième figure en *Darapti* et en *Felapton* ne sont pas valides puisque les deux prémisses sont universelles et la conclusion particulière : au cas où le moyen terme est "vide", les prémisses peuvent être vraies et la conclusion fausse, voir ci-dessous l'exemple de *Darapti*).

B.1 Démonstration de *Camestres*.

Voilà, par ex. comment démontrer le syllogisme de la deuxième figure, *Camestres* :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tout } P \text{ est } M \\ \text{Aucun } S \text{ n'est } M\end{array}}{\text{Aucun } S \text{ n'est } P}$$

On transcrit ce syllogisme dans la notation actuelle par :

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(Px \Rightarrow Mx) \\ \forall y(Sy \Rightarrow \sim My)\end{array}}{\forall z(Sz \Rightarrow \sim Pz)}$$

Cette inférence (syllogistique) est valide, ssi l'implication correspondante :

$$\psi = [\forall x(Px \Rightarrow Mx) \wedge \forall y(Sy \Rightarrow \sim My)] \Rightarrow \forall z(Sz \Rightarrow \sim Pz)$$

est elle-même valide, i.e. ssi. sa négation n'est pas satisfiable.

Supposons en effet que sa négation :

$$\sim\psi = \sim\{[\forall x(Px \Rightarrow Mx) \wedge \forall y(Sy \Rightarrow \sim My)] \Rightarrow \forall z(Sz \Rightarrow \sim Pz)\}$$

soit satisfiable ; on montre que cela conduit à une contradiction. Que la formule $\sim\psi$ soit satisfiable signifie qu'elle est vraie dans un domaine pour une interprétation des lettres de prédicat (l'interprétation des variables d'individu n'importe pas, puisque cette formule est close). On va donc essayer de spécifier un domaine D, et l'interprétation de S, P et$M$, pour lesquels $\sim\psi$ est vraie (on dira dans ce qui suit "vraie dans D" ou "fausse dans D").

En vertu de la table de "$\Rightarrow$", si $\sim\psi$ est vraie dans D, l'antécédent, $\forall x(Px \Rightarrow Mx) \wedge \forall y(Sy \Rightarrow \sim My)$ est vraie dans D, et le conséquent, $\forall z(Sz \Rightarrow \sim Pz)$, est faux dans D.

Que le conséquent soit faux dans D signifie que sa négation est vraie dans D, autrement dit que $\sim\forall z(Sz \Rightarrow \sim Pz)$ est vraie dans D. En vertu des équivalences entre quantificateurs, cela signifie que $\exists z \sim (Sz \Rightarrow \sim Pz)$ est vraie dans D et donc (en vertu de l'équivalence entre $\sim (p \Rightarrow q)$ et $p \wedge \sim q$) que $\exists z(Sz \wedge \sim\sim Pz)$ est vraie dans D, ce qui à son tour, signifie que $\exists z(Sz \wedge Pz)$ est vraie dans D. On remarque, en passant, que cette formule est la particulière affirmative contradictoire de l'universelle négative dont on était parti. Cette formule "dit" qu'il existe dans le domaine D, un objet, disons a, tel que Sa et Pa sont vraies dans D, ce qui n'est possible que si :

$$\boxed{a \in \mathbf{S}} \text{ et } \boxed{a \in \mathbf{P}}$$

Mais l'antécédent de l'implication principale est supposé vrai dans D, ce qui signifie que les deux formules : $\forall x(Px \Rightarrow Mx)$ et $\forall y(Sy \Rightarrow \sim My)$ sont elles-mêmes vraies dans D. La deuxième formule, $\forall y(Sy \Rightarrow \sim My)$, valant de toute chose dans D, vaut en particulier de a et donc $Sa \Rightarrow \sim Ma$ est vraie dans D. Comme on a déjà trouvé que Sa est vraie dans D, cela signifie que $\sim Ma$ est vraie dans D, ce qui n'est possible que si :

$$\boxed{a \notin \mathbf{M}}$$

De la même manière, puisque $\forall x(Px \Rightarrow Mx)$ est vraie dans D, cette formule vaut de toute chose, et en particulier de a, et donc $Pa \Rightarrow Ma$ est vraie dans D. Comme on a déjà trouvé que Pa est vraie dans D, cela signifie que Ma est vraie dans D, ce qui n'est possible que si :

$$\boxed{a \in \mathbf{M}}$$

On arrive donc à une contradiction ; la tentative de spécifier un domaine et une interprétation des lettres de prédicat S, P et M rendant vraie la formule $\sim\psi$ s'avère impossible, ce qui veut dire que la formule $\sim\psi$ n'est pas satisfiable et donc que ψ est universellement valide. Aristote avait raison (ouf !).

B.2 Démonstration de *Datisi*

On démontre maintenant le syllogisme de la troisième figure, *Datisi* :

$$\begin{array}{c} \text{Tout } M \text{ est } P \\ \text{Quelque } M \text{ est } S \\ \hline \text{Quelque } S \text{ est } P \end{array}$$

On transcrit ce syllogisme dans la notation actuelle par :

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(Mx \Rightarrow Px)\\ \exists y(My \wedge Sy)\end{array}}{\exists z(Sz \wedge Pz)}$$

Cette inférence (syllogistique) est valide ssi l'implication correspondante :

$$\psi = [\forall x(Mx \Rightarrow Px) \wedge \exists y(My \wedge Sy)] \Rightarrow \exists z(Sz \wedge Pz)$$

est elle-même valide, c'est à dire : ssi sa négation, $\sim\psi$, n'est pas satisfiable.

Supposons que $\sim\psi$ soit satisfiable. Comme précédemment, on montre que cela conduit à une contradiction. Que la formule $\sim\psi$ soit satisfiable signifie qu'elle est vraie dans un domaine pour une interprétation des lettres de prédicat (là encore, l'interprétation des variables d'individu n'importe pas, puisque cette formule est close). On va donc, une fois de plus, essayer de spécifier un domaine D, et une interprétation de S, P et M, pour lesquels $\sim\psi$ est vraie.

En vertu de la table de "$\Rightarrow$", si $\sim\psi$ est vraie dans D, l'antécédent, $\forall x(Mx \Rightarrow Px) \wedge \exists y(My \wedge Sy)$ est vraie dans D, et le conséquent, $\exists z(Sz \wedge Pz)$, est faux dans D.

Puisque l'antécédent est vrai dans D, les deux membres de la conjonction sont vrais dans D, et, en particulier, $\exists y(My \wedge Sy)$ est vraie dans D.

Soi $a \in D$, l'objet dont cette dernière formule affirme l'existence ; $Ma \wedge Sa$ est donc vraie dans D, ce qui n'est possible que si :

$$\boxed{a \in \mathbf{M}} \text{ et } \boxed{a \in \mathbf{S}}.$$

Mais le premier membre de la conjonction, $\forall x(Mx \Rightarrow Px)$, est également vrai dans D et comme cette formule vaut de toute chose, elle vaut en particulier de a ; en conséquence, $Ma \Rightarrow Pa$ est vraie dans D. Et comme on a déjà trouvé que Ma est vraie dans D, cela signifie que Pa est vraie dans D, ce qui n'est possible que si :

$$\boxed{a \in \mathbf{P}}.$$

Par ailleurs, on a admis que le conséquent de ψ, $\exists z(Sz \wedge Pz)$, est faux dans D, ce qui veut dire que sa négation, $\sim\exists z(Sz \wedge Pz)$, est vraie dans D, autrement dit que $\forall z \sim(Sz \wedge Pz)$ c'est à dire, par de Morgan, $\forall z(\sim Sz \vee \sim Pz)$ est vraie dans D. Comme cette formule vaut de toute chose dans D, elle vaut en particulier de a et donc $\sim Sa \vee \sim Pa$ est vraie dans D. Et comme on a déjà trouvé que Sa est vraie dans D, cela signifie que $\sim Pa$ est vraie dans D, ce qui n'est possible que si :

$$\boxed{a \notin \mathbf{P}}.$$

ce qui contredit ce l'on avait trouvé plus haut. Aristote a donc encore une fois raison...

B.3 Quelques remarques

1. Inférence et implication.

   Dans ce qui précède, pour établir la validité d'une *inférence* (syllogistique, en l'occurrence), on a d'abord "transformé" l'inférence en une *implication* de la même manière qu'en propositionnel : l'implication correspondant à une inférence a pour antécédent la conjonction des prémisses, et pour conséquent, la conclusion de l'inférence. Se demander si cette implication est valide, c'est se demander s'il pourrait être le cas que son antécédent soit vrai et son conséquent, faux. Autrement dit, c'est se demander si la conjonction des prémisses de l'inférence correspondante, pourrait être vraie, et la conclusion de l'inférence, fausse, ce qui revient, en fin de compte, à se demander si les prémisses pourraient être simultanément vraies, et la conclusion, fausse dans un domaine D pour une interprétation des lettres de prédicat.

On voit qu'il n'est donc nullement nécessaire, lorsque l'on cherche à établir la validité d'une inférence, d'en passer par l'implication correspondante : il suffit d'établir que les prémisses de l'inférence ne peuvent être simultanément vraies, et la conclusion fausse. C'est bien ce que l'on a fait ci-dessus pour *Datisi*, par ex. : on a supposé vraies dans un domaine D les deux prémisses de *Datisi*, à savoir : $\forall x(Mx \Rightarrow Px)$ et $\exists y(My \wedge Sy)$ et faux dans D sa conclusion : $\exists z(Sz \wedge Pz)$. Comme cela conduit à une contradiction, on en a conclu que l'inférence était valide.

En général, donc, lorsque l'on veut établir qu'une inférence est valide, il suffit de se demander si les prémisses et la négation de la conclusion sont simultanément satisfiables. Si cela s'avère impossible, car conduisant à une contradiction, on est assuré que l'inférence est valide.

2. Universelle et existentielle.

   Le lecteur un peu attentif a pu remarquer que dans les deux démonstrations précédentes (ainsi, du reste que dans la démonstration de *Barbara*), on avait commencé par examiner à quelle condition une formule de type "existentiel" (une "existentielle", pour abréger) pouvait être vraie dans un domaine D, pour, après seulement, considérer les formules de type "universel" (une "universelle"). Pourquoi cela ?

   Intuitivement, l'avantage, si l'on peut dire, d'une existentielle est, qu'à la différence d'une universelle, elle ne peut être vraie que s'il existe effectivement "quelque chose" (un "objet") qui la satisfait ; peu importe que cela soit effectivement le cas dans notre "monde" : *si* elle est vraie (dans un autre "monde"), alors on est assuré qu'il existe (dans ce monde) au moins un objet qui, etc. On peut ensuite raisonner sur ce supposé objet, puisque les autres formules, de type universel, valent, en particulier, pour lui.

   Que se passerait-il si l'on avait à raisonner sur des universelles seulement ? Prenons l'exemple de *Felapton* (3ème figure) qui dans la notation actuelle s'écrit :

$$\begin{array}{c}\forall x(Mx \Rightarrow \sim Px)\\ \forall y(My \Rightarrow Sy)\\ \hline \exists z(Sz \wedge \sim Pz)\end{array}$$

   On se demande si les prémisses peuvent être vraies dans un domaine D et la conclusion fausse dans D, autrement dit si les prémissses et la négation de la conclusion peuvent être simultanément vraies dans D. Les deux prémisses sont des universelles, et la négation de la conclusion est elle même une universelle puisque $\sim\exists z(Sz \wedge \sim Pz)$ équivaut à $\forall z \sim(Sz \wedge \sim Pz)$, c'est à dire (par de Morgan) à : $\forall z(\sim Sz \vee Pz)$ et donc (en vertu de l'équivalence $(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\sim\varphi \vee \psi)$) à $\forall x(Sx \Rightarrow Px)$ qui n'est autre que l'universelle affirmative correspondante (ce qui montre, en passant, que la relation de "contradiction" du carré des oppositions est bien valide !).

Si l'on veut raisonner à partir de ces trois universelles, on peut admettre qu'il existe au moins un objet et raisonner sur lui : n'ayant aucune "propriété" particulière, cet objet est, pourrait-on dire, interchangeable avec n'importe quel autre. On peut donc admettre, au terme du raisonnement, que ce que l'on a établi de cet objet vaut de tout autre objet. Cela suppose quelque chose qui logiquement peut sembler excessif, à savoir qu'il existe au moins un objet dans tout "monde", ce qui peut choquer le logicien scrupuleux qui prétend ne faire aucune hypothèse particulière sur le, ou les, mondes(s).

Par ex., dans le cas de *Felapton*, les trois universelles pourraient être vraies dans un domaine vide, i.e. s'il n'y avait aucun objet (s'il n'y avait "rien", si le monde n'était qu'un songe, par ex.). Pour s'en convaincre, il suffit de considérer à quelle condition une universelle est fausse : elle est fausse ssi *il existe au moins un* objet qui ne la satisfait pas. S'il n'y a "rien", cette condition n'est pas satisfaite, et donc l'universelle ne peut être fausse ; elle est donc, en ce cas, vraie. Ce qui signifie qu'un syllogisme comme *Felapton* est "automatiquement" invalide, puisque, dans un monde "vide" (un non-monde (!), à vrai dire) les prémisses sont vraies et la conclusion fausse.

On peut estimer que ce cas est un peu scabreux et qu'il n'y a nul scandale à admettre qu'il existe, dans tout "monde", au moins un objet ; certes, mais ce cas ne peut logiquement être exclu... Pour rester, toutefois, plus proche du "sens commun" on admettra que ce cas ne se présente pas, mais il faut se souvenir qu'il ne s'agit que d'une concession logiquement suspecte.

Pour en revenir à *Felapton*, voilà comment l'on peut alors procéder ; on suppose que les trois universelles : $\forall x(Mx \Rightarrow\sim Px)$, $\forall y(My \Rightarrow Sy)$ et $\forall z(Sz \ \Rightarrow Pz)$ sont simultanément vraies (dans un domaine D) et qu'il existe au moins un objet, disons a, appartenant à D. Les trois formules $Ma \Rightarrow\sim Pa$, $Ma \Rightarrow Sa$ et $Sa \ \Rightarrow Pa$ sont donc vraies dans D. Cela implique-t-il contradiction ? non ! Il suffit d'admettre que Ma est fausse dans D, ce qui rend vraies dans D les deux premières formules (prémisses de *Felapton*) et que Sa est fausse dans D ou que Pa est vraie dans D, ce qui rend vraie dans D la troisième formule (négation de la conclusion de *Felapton*).

Il n'y a là rien de contradictoire : intuitivement, l'objet a, seul objet appartenant à D, peut parfaitement n'être ni **M**, ni **S**, par ex., tout en étant, ou en n'étant pas (peu importe), **P**. *Felapton* n'est donc pas valide [38].

Il faut donc bien distinguer deux cas :

– Dans un monde (domaine) "vide" toutes les universelles sont vraies pour la raison indiquée plus haut, et on peut ajouter, ce qui est trivial, que toutes les existentielles sont fausses. On exclut ce cas en admettant (ce qui est logiquement suspect, donc...) que l'on ne prend pas en considération de tels "mondes" (domaines).

– D'autre part, comme on l'a vu ci-dessus (p. 11), une universelle de la forme $\forall x(Px \Rightarrow Qx)$ ou de la forme $\forall x(Px \Rightarrow\sim Qx)$ (qui correspondent respectivement à l'universelle affirmative et à l'universelle négative d'Aristote) peut être vraie dans un "monde" non-vide simplement parce que, dans ce "monde", *il n'y a rien qui soit* **P**. Ce cas n'est, lui, nullement exclu, ce

38. Par contre, si l'on ajoute la prémisse $\exists x Mx$, *Felapton* ainsi modifié est valide puisque ce n'est qu'au cas où il n'y a rien, dans un domaine D, qui soit M que les deux prémisses de *Felapton* sont vraies et que la conclusion peut être fausse dans ce même domaine D. Même remarque pour *Darapti*.

qui rend invalides les relations de subalternation, de contrariété et de subcontrariété du "carré des oppositions" d'Aristote (pourquoi ? à justifier...), ainsi que les syllogismes de la troisième figure en *Felapton* (comme on vient de le voir) et en *Darapti*, ainsi que ceux des modes indirects de la 1ère figure (et leur correspondant dans la 4ème figure), *Baralipton / Bramantip* et *Fapesmo / Fesapo*.

B.4 Retour au propositionnel

Dans le cas des syllogismes d'Aristote (mais pas seulement) il est facile de voir que la démarche que l'on vient d'exemplifier sur trois d'entre eux, se ramène en fin de compte à l'examen de la satisfiabilité de trois formules en propositionnel. Considérons par ex. le cas de *Camestres*. On a d'abord admis que Sa et Pa étaient vrais. Notons ces deux formules élémentaires par s et p. Il s'agit maintenant de savoir si cela est compatible avec les deux autres formules $Sa \Rightarrow\sim Ma$ et $Pa \Rightarrow Ma$. Notons la formule élémentaire Ma, m, et donc ces deux formules : $s \Rightarrow\sim m$ et $p \Rightarrow m$. Il s'agit maintenant de déterminer si ces deux formules peuvent être vraies lorsque s et p sont vrais. Puisque s est vrai, $s \Rightarrow\sim m$ n'est vrai que si m est faux, et puisque p est vrai, $p \Rightarrow m$ n'est vrai que si m est vrai ; d'où contradiction. On peut présenter cela de la manière suivante :

s	$\Rightarrow$	$\sim$	m	p	$\Rightarrow$	m
V	V			V	V	
		V				**V**
			F			

Prenons maintenant l'exemple de *Felapton*, en adoptant les mêmes conventions. Il s'agit de déterminer s'il est possible que les trois formules $m \Rightarrow \sim p$, $m \Rightarrow s$ et $s \Rightarrow p$ soient simultanément vraies. Pour que $s \Rightarrow$ soit vrai il faudrait que s soit faux ou que p soit vrai. Supposons s faux ; pour que $m \Rightarrow s$ soit vrai, il faut alors que m soit faux, ce qui rend également vraie l'autre formule $m \Rightarrow p$, quelle que soit la valeur de p. Le même "raisonnement" pourrait être fait en supposant que p soit vrai. On peut présenter cela de la manière suivante, pour le cas où s est faux :

m	$\Rightarrow$	p	m	$\Rightarrow$	s
	V			V	F
F			F		

Table des matières