Logique propositionnelle

1 Vocabulaire, grammaire du langage L pour le calcul des propositions.

On définit L, langage pour le calcul des propositions, comme suit :

1. Liste des symboles :
   - un ensemble P, infini dénombrable, de lettres de proposition, $p_1, \ldots, p_n \ldots$
   - les connecteurs : $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$
   - les symboles impropres : (,), [,], {, }, etc.

   Remarques :
   - on pourrait n'introduire que deux connecteurs, $\sim$ et l'un des trois autres connecteurs ; les autres connecteurs seraient alors introduits par définition. On admettra ainsi que la bi-implication (notée $\Leftrightarrow$) est introduite par définition.
   - pour des raisons de commodité, plutôt que les lettres indicées p_1, p_2, p_3, etc., on utilisera, la plupart du temps, les lettres p, q, r, s, etc.

2. Règles de formation (définition récursive de "être une formule bien formée") :
   - a. une lettre de proposition isolée est une formule bien formée (formule élémentaire ou atomique).
   - b. si φ est une formule bien formée, $\sim\varphi$ est une formule bien formée.
   - c. si φ et ψ sont des formules bien formées, alors :
     - i. $(\varphi \wedge \psi)$ est une formule bien formée
     - ii. $(\varphi \vee \psi)$ est une formule bien formée
     - iii. $(\varphi \Rightarrow \psi)$ est une formule bien formée.
   - d. Seules sont bien formées les formules obtenues par application des règles a - c.

   L'ensemble des formules bien formées est noté F.

   Remarque : φ, ψ, θ, etc. sont des variables (éventuellement indicées) du métalangage désignant des formules quelconques du langage objet ("φ" se lit phi, "ψ" se lit psi, "θ" se lit thêta) ; ces lettres n'appartiennent donc pas au langage objet, L.

   Exemple : par 2.a., p_3, p_7 et p_9 sont des formules bien formées ; donc par 2.b., $\sim p_9$ est une formule bien formée. Par 2.c.iii., $(p_3 \Rightarrow\sim p_9)$ est une formule bien formée et par 2.c.ii., $[p_7 \vee (p_3 \Rightarrow\sim p_9)]$ est une formule bien formée, etc.

Comment déterminer si une suite de symboles de L est une formule bien formée ?

Soit la suite : $\{[(p_6 \Rightarrow p_3) \wedge p_9] \vee [p_7 \vee (p_3 \Rightarrow \sim p_9)]\}$.
Cette suite peut être considérée comme ayant été obtenue par application de la règle 2.c.ii. et être donc de la forme :

$(\varphi \vee \psi)$, avec
$\varphi = [(p_6 \Rightarrow p_3) \wedge p_9]$ et
$\psi = [p_7 \vee (p_3 \Rightarrow \sim p_9)]$.

Il faut maintenant s'assurer que ces deux suites sont des formules bien formées.

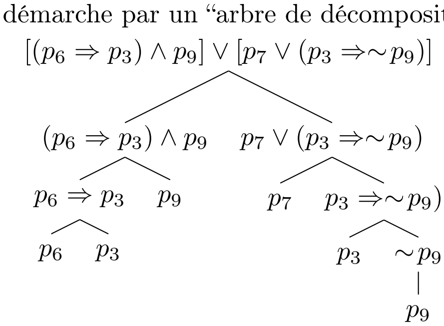
-φ peut être considérée comme ayant été obtenue par application de la règle 2.c.i. et être donc de la forme $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, avec $\varphi_1 = (p_6 \Rightarrow p_3)$, et $\varphi_2 = p_9$. p_9 est une formule bien formée en vertu de 2.a.

Il reste à s'assurer que φ_1 est une formule bien formée. φ_1 peut être considérée comme ayant été obtenue par application de la règle 2.c.iii. et être donc de la forme $(\varphi_3 \Rightarrow \varphi_4)$, avec $\varphi_3 = p_6$ et $\varphi_4 = p_3$. p_6 et p_3 sont des formules bien formées par 2.a. ; φ_1, et donc φ, sont des formules bien formées.

- ψ peut être considérée comme ayant été obtenue par application de la règle 2.c.ii. et être donc de la forme $(\psi_1 \vee \psi_2)$, avec $\psi_1 = p_7$ et $\psi_2 = (p_3 \Rightarrow \sim p_9)$. p_7 est une formule bien formée en vertu de 2.a. Il faut encore s'assurer que ψ_2 est une formule bien formée. ψ_2 peut être considérée comme ayant été obtenue par application de la règle 2.c.iii. et être donc de la forme $(\psi_3 \Rightarrow \psi_4)$, avec $\psi_3 = p_3$ et $\psi_4 = \sim p_9$. p_3 est une formule bien formée en vertu de 2.a. Il reste à s'assurer que ψ_4 est une formule bien formée. ψ_4 peut être considérée comme ayant été obtenue par application de la règle 2.b. et être donc de la forme $\sim \psi_5$, avec $\psi_5 = p_9$. p_9 est une formule bien formée en vertu de 2.a. ψ est donc une formule bien formée.

$[(p_6 \Rightarrow p_3) \wedge p_9]$ et $[p_7 \vee (p_3 \Rightarrow \sim p_9)]$ sont donc des formules bien formées, de même, par 2.c.ii., que $[(p_6 \Rightarrow p - 3) \wedge p_9] \vee [p_7 \vee (p_3 \Rightarrow \sim p_9)]$.

On peut représenter cette démarche par un "arbre de décomposition", comme suit :



On remarque facilement que chaque formule est obtenue par application d'une des règles 2.a. — 2.c. sur une ou des formules figurant sur la ligne inférieure. Cet "arbre" peut se lire de haut en bas (décomposition de la formule) ou de bas en haut (formation de la formule). Pour chaque formule, cet "arbre" est unique.

Toutes les formules apparaissant sur cet arbre sont des sous-formules de la première formule. On appellera "sous-formules immédiates (ou principales)" les deux formules $[(p_6 \Rightarrow p_3) \wedge p_9]$ et $[p_7 \vee (p_3 \Rightarrow \sim p_9)]$.

3. Degré d'une formule : on définit récursivement une fonction "dg" qui va de l'ensemble des formules vers l'ensemble des entiers naturels positifs ou nul ($dg : F \to \mathbb{N}$), par les clauses suivantes :
   - si φ est une formule élémentaire, $dg(\varphi) = 0$
   - si $dg(\varphi) = n$, $dg(\sim\varphi) = n + 1$
   - si $dg(\varphi) = n$ et $dg(\psi) = m$, alors :
     - i. $dg(\varphi \wedge \psi) = n + m + 1$
     - ii. $dg(\varphi \vee \psi) = n + m + 1$
     - iii. $dg(\varphi \Rightarrow \psi) = n + m + 1$

   On constate facilement que cela revient à définir le degré d'une formule comme étant le nombre des connecteurs qui figurent dans la formule. Par exemple, la formule pour laquelle on a fait l'arbre de décomposition ci-dessus est de degré 6.
   Cette notion est importante car elle permet de raisonner par récurrence sur l'ensemble des formules.

2 Interprétation, évaluation

- Une interprétation i, est une fonction de P vers {V,F} ($i : P \to \{V,F\}$), autrement dit, i attribue à chaque lettre de proposition une valeur de vérité (VRAI ou FAUX).
  Si l'on ne prend en considération qu'un nombre fini, n, de lettres de proposition, il existe 2^n interprétations différentes de ces n lettres de proposition.

  > A noter (rappel du cours de 1ère année) : il résulte de cette définition que la valeur de vérité attribuée par une interprétation i à une lettre de proposition p_i, ne dépend en rien de la valeur de vérité que la même interprétation i attribue à une autre lettre de proposition p_j (en termes plus "philosophiques", cela veut dire que la vérité ou la fausseté d'une proposition élémentaire ne dépend en rien de la vérité ou la fausseté d'une autre proposition élémentaire : principe d'*indépendance* des propositions élémentaires).

- Une évaluation (booléenne) v, est une fonction de F vers {V,F} ($v : F \to \{V,F\}$) qui obéit aux conditions suivantes (cf. les tables de vérité des connecteurs) [1].

  - $v(\varphi) = V$ ssi $v(\sim\varphi) = F$
  - $v(\varphi \wedge \psi) = V$ ssi $v(\varphi) = V$ et $v(\psi) = V$
  - $v(\varphi \vee \psi) = F$ ssi $v(\varphi) = F$ et $v(\psi) = F$

1. rappel : "ssi" est une abréviation pour "si et seulement si".

– $v(\varphi \Rightarrow \psi) = \mathrm{F}$ ssi $v(\varphi) = \mathrm{V}$ et $v(\psi) = \mathrm{F}$

Une interprétation i étant donnée, l'évaluation v_i correspondant à cette interprétation est définie de telle sorte que $v_i(p_i) = i(p_i)$, pour tout p_i appartenant à P. Comme $P \subset F$, $v_i : F \to \{\mathrm{V}, \mathrm{F}\}$ est une extension de $i : P \to \{\mathrm{V,F}\}$. En vertu des conditions auxquelles obéit v_i, cette extension est unique (à démontrer) ; autrement dit, si pour tout $p_i \in P$, $i(p_i) = i'(p_i)$, alors pour toute formule $\varphi \in F$, $v_i(\varphi) = v_{i'}(\varphi)$. Cela revient à dire que la valeur de vérité d'une formule φ ne dépend que de la valeur de vérité des lettres de proposition figurant dans φ. On pourra donc se contenter de parler de la valeur de vérité d'une formule pour une interprétation i donnée.

Rappel de quelques définitions :

– une formule φ est *satisfiable* ssi elle prend la valeur V pour au moins une interprétation i ; on dit que i satisfait φ.
– une formule est *tautologique* (ou valide) ssi elle prend la valeur V pour toute interprétation.
– une formule est *contradictoire* ssi elle prend la valeur F pour toute interprétation.
– une formule qui n'est ni tautologique ni contradictoire est dite *neutre*.
– une formule ψ est *conséquence sémantique* d'une formule φ ssi toute interprétation qui satisfait φ, satisfait également ψ (ce que l'on note : $\varphi \vDash \psi$).

  Remarque : en vertu de ces définitions, une formule φ est tautologique ssi pour toute formule ψ, $\psi \vDash \varphi$. De la même manière, une formule φ est contradictoire ssi pour toute formule ψ, $\varphi \vDash \psi$.

– un ensemble de formules S est *simultanément satisfiable* ssi il existe au moins une interprétation i pour laquelle toutes les formules de S prennent la valeur V ; on dit que i satisfait S.
– une formule φ est *conséquence sémantique* d'un ensemble S de formules ssi toute interprétation qui satisfait S, satisfait également φ (ce que l'on note : $S \vDash \varphi$).
– deux formules sont *sémantiquement équivalentes* ssi elles sont satisfaites par exactement les mêmes interprétations.

Remarque : en vertu de ces définitions, une formule est tautologique ssi elle est conséquence sémantique de l'ensemble vide. De plus, toutes les formules tautologiques sont sémantiquement équivalentes, ainsi que toutes les formules contradictoires.

3 Ensembles de vérité, ensemble de vérité descendant.

3.1 Ensemble de vérité.

-Df. sémantique : soit i une interprétation ; l'ensemble $W \subseteq F$ des formules qui prennent la valeur V pour i est un ensemble de vérité. Autrement dit, $W \subseteq F$ est un ensemble de vérité ssi il existe une interprétation i telle que pour toute formule $\varphi \in F$,

$$\varphi \in W \text{ ssi } v_i(\varphi) = \mathrm{V}.$$

Il y a donc autant d'ensembles de vérité distincts qu'il y a d'interprétations distinctes. On dira de l'interprétation i telle que $\varphi \in W$ ssi $v_i(\varphi) = \mathrm{V}$, qu'elle *correspond* à W.

Il résulte immédiatement de cette définition que l'ensemble T des tautologies est strictement inclus dans tout ensemble de vérité, i.e. : si W est un ensemble de vérité, on a : $\mathsf{T} \subset W$. Ce qui revient à dire : T est l'intersection de tous les ensembles de vérité.

De la même manière, l'ensemble C des contradictions est disjoint de tout ensemble de vérité, i.e. : si W est un ensemble de vérité, $\mathsf{C} \cap W = \emptyset$ [2].

D'une manière un peu imagée, on pourrait dire qu'un ensemble de vérité "coupe en deux" l'ensemble F des formules de L : puisque, pour toute formule φ et toute interprétation i, soit $v_i(\varphi) = V$, soit $v_i(\sim\varphi) = \mathrm{V}$ mais pas les deux (!), on a : pour toute formule φ et tout ensemble de vérité W, soit $\varphi \in W$, soit $\sim\varphi \in W$, mais pas les deux.

Un ensemble de vérité W est *maximal* au sens suivant : pour toute formule φ, si $\varphi \notin W$, alors $W \cup \{\varphi\}$ n'est pas satisfiable (à démontrer !).

-Df. syntaxique On peut caractériser syntaxiquement un ensemble W de formules par les clauses suivantes :

pour toute formule φ, ψ :
- a. $\varphi \in W$ ssi $\sim\varphi \notin W$, (i.e. soit $\varphi \in W$, soit $\sim\varphi \in W$ mais pas les deux)
- b. $\varphi \wedge \psi \in W$ ssi $\varphi \in W$ et $\psi \in W$
- c. $\varphi \vee \psi \in W$ ssi $\varphi \in W$ ou $\psi \in W$
- d. $\varphi \Rightarrow \psi \in W$ ssi $\varphi \notin W$ ou $\psi \in W$

On démontre par récurrence sur le degré des formules [3] que ces deux définitions, sémantique et syntaxique, sont équivalentes, c'est à dire : un ensemble de formules W satisfait les clauses a. — d. ci-dessus ssi il existe une interprétation i, telle que pour toute formule φ, $\varphi \in W$ ssi $v_i(\varphi) = \mathrm{V}$.

3.1.1 Démonstration dans le sens $\rightarrow$

On démontre tout d'abord : si un ensemble de formules W satisfait les clauses a. — d. ci-dessus alors il existe une interprétation i, telle que pour toute formule φ, $\varphi \in W$ ssi $v_i(\varphi) = \mathrm{V}$.

Soit un ensemble de formules W satisfaisant les clauses a.—d. ci-dessus. On définit une interprétation i par : $i(p_i) = \mathrm{V}$ ssi $p_i \in W$.

On démontre par récurrence sur le degré des formules que, pour cette interprétation i et pour toute formule φ, $\varphi \in W$ ssi $v_i(\varphi) = \mathrm{V}$.

2. Autre formulation : pour tout $\varphi \in F$ et tout $W \subseteq F$, si φ est une tautologie et W un ensemble de vérité, alors $\varphi \in W$. De la même manière : pour tout $\varphi \in F$ et tout $W \subseteq F$, si φ est une contradiction et W un ensemble de vérité, alors $\varphi \notin W$.

3. Voir l'Appendice A, p. 38 et *sq*, pour l'explication détaillée de ce qu'est une démonstration par récurrence.

– Soit $dg(\varphi) = 0$. φ est donc de la forme p. Alors : $\varphi \in W$ ssi^1 $p \in W$ ssi^2 $i(p) =$ V, ssi^3 $v_i(p) =$ V, ssi^1 $v_i(\varphi) =$ V.

ssi^1 : par définition de φ.
ssi^2 : par la définition de l'interprétation i
ssi^3 : par la définition de l'évaluation v_i

– Hypothèse de récurrence : pour toute formule φ telle que $dg(\varphi) < n$, $\varphi \in W$ ssi $v_i(\varphi) =$ V.

– Soit $dg(\varphi) = n$.
  – a. φ est de la forme $\sim\psi$. Alors : $\varphi \in W$, ssi^1 $\sim\psi \in W$, ssi^2 $\psi \notin W$, ssi^3 $v_i(\psi) =$ F, ssi^4 $v_i(\sim\psi) =$ V, ssi^1 $v_i(\varphi) =$ V.

  – b. φ est de la forme $\psi \wedge \theta$. Alors : $\varphi \in W$, ssi^1 $\psi \wedge \theta \in W$, ssi^2 $\psi \in W$ et $\theta \in W$, ssi^3 $v_i(\psi) =$ V et $v_i(\theta) =$ V ssi^4 $v_i(\psi \wedge \theta) =$ V, ssi^1 $v_i(\varphi) =$ V.

  – c. φ est de la forme $\psi \vee \theta$. Alors : $\varphi \in W$, ssi^1 $\psi \vee \theta \in W$, ssi^2 $\psi \in W$ ou $\theta \in W$, ssi^3 $v_i(\psi) =$ V ou $v_i(\theta) =$ V ssi^4 $v_i(\psi \vee \theta) =$ V, ssi^1 $v_i(\varphi) =$ V.

  – d. φ est de la forme $\psi \Rightarrow \theta$. Alors : $\varphi \in W$, ssi^1 $\psi \Rightarrow \theta \in W$, ssi^2 $\psi \notin W$ ou $\theta \in W$, ssi^3 $v_i(\psi) =$ F ou $v_i(\theta) =$ V ssi^4 $v_i(\psi \Rightarrow \theta) =$ V, ssi^1 $v_i(\varphi) =$ V.

ssi^1 : par définition de φ.
ssi^2 : par la définition "syntaxique" de W.
ssi^3 : en vertu de l'hypothèse de récurrence : $dg(\psi) < n$ et $dg(\theta) < n$.
ssi^4 : par la définition de la fonction v.

3.1.2 Démonstration dans le sens $\leftarrow$

On démontre maintenant : s'il existe une interprétation i, telle que pour toute formule φ, $\varphi \in W$ ssi $v_i(\varphi) =$ V, alors l'ensemble W satisfait les clauses a. — d. ci-dessus.

Soit i une interprétation et W l'ensemble des formules vraies pour cette interprétation ; i.e. pour toute formule φ, $\varphi \in W$ ssi $v_i(\varphi) =$ V. On démontre que W satisfait les clauses a.—d. ci-dessus.

– a. $\varphi \in W$ ssi $v_i(\varphi) =$ V ssi $v_i(\sim\varphi) =$ F ssi $\sim\varphi \notin W$.

– b. $\varphi \wedge \psi \in W$ ssi $v_i(\varphi \wedge \psi) =$ V ssi $v_i(\varphi) =$ V et $v_i(\psi) =$ V ssi $\varphi \in W$ et $\psi \in W$.

– c. $\varphi \vee \psi \in W$ ssi $v_i(\varphi \vee \psi) =$ V ssi $v_i(\varphi) =$ V ou $v_i(\psi) =$ V ssi $\varphi \in W$ ou $\psi \in W$.

– d. $\varphi \Rightarrow \psi \in W$ ssi $v_i(\varphi \Rightarrow \psi) =$ V ssi $v_i(\varphi) =$ F ou $v_i(\psi) =$ V ssi $\varphi \notin W$ ou $\psi \in W$.

Ce qui achève la démonstration.

3.2 Ensembles de vérité descendant.

Remarque préliminaire : l'idée intuitive qui sous-tend celle d'ensemble de vérité descendant (on notera ce genre d'ensemble W_D), est de mettre dans un tel ensemble toutes les sous-formules ou négations de sous-formule qui doivent être vraies pour que la ou les formules dont on part, le soient. On pourrait donc penser que pour définir un ensemble de vérité descendant, il suffirait de reprendre les clauses "syntaxiques" définissant un ensemble de vérité en substituant aux "ssi", des "si...alors..." ; ce qui donnerait quelque chose comme :

– si $\varphi \in W_D$ alors $\sim\varphi \notin W_D$
– si $\sim\varphi \in W_D$ alors $\varphi \notin W_D$
– si $\varphi \wedge \psi \in W_D$ alors $\varphi \in W_D$ et $\psi \in W_D$
– si $\varphi \vee \psi \in W_D$ alors $\varphi \in W_D$ ou $\psi \in W_D$
– si $\varphi \Rightarrow \psi \in W_D$ alors $\sim\varphi \in W_D$ ou $\psi \in W_D$

Toutefois, cela est insuffisant car alors on ne pourrait traiter de manière générale les formules de la forme $\sim\psi$: par la deuxième clause, on sait que si $\sim\psi \in W_D$ alors $\psi \notin W_D$, mais alors on ne sait plus rien de ψ puisque les clauses disent bien quelque chose des formules qui *appartiennent* à W_D, mais ne disent rien de celles qui n'appartiennent pas à W_D. Ainsi, par ex. si $\sim(\varphi \vee \psi) \in W_D$ alors, par la deuxième clause, on sait que $(\varphi \vee \psi) \notin W_D$ mais on ne peut rien tirer de cela concernant φ, ψ et leur négation. Il convient donc de préciser cette définition en ajoutant les clauses pour les négations ; ce qui donne la définition suivante (évidemment plus longue !).

Un ensemble de formules W_D est un ensemble de vérité descendant ssi, pour toute formule φ, ψ :

– a. si $\varphi \in W_D$ alors $\sim\varphi \notin W_D$
– a'. si $\sim\varphi \in W_D$ alors $\varphi \notin W_D$
– b. si $\sim\sim\varphi \in W_D$ alors $\varphi \in W_D$
– c. si $(\varphi \wedge \psi) \in W_D$ alors $\varphi \in W_D$ et $\psi \in W_D$
– c'. si $\sim(\varphi \wedge \psi) \in W_D$ alors $\sim\varphi \in W_D$ ou $\sim\psi \in W_D$
– d. si $(\varphi \vee \psi) \in W_D$ alors $\varphi \in W_D$ ou $\psi \in W_D$
– d'. si $\sim(\varphi \vee \psi) \in W_D$ alors $\sim\varphi \in W_D$ et $\sim\psi \in W_D$
– e. si $(\varphi \Rightarrow \psi) \in W_D$ alors $\sim\varphi \in W_D$ ou $\psi \in W_D$
– e'. si $\sim(\varphi \Rightarrow \psi) \in W_D$ alors $\varphi \in W_D$ et $\sim\psi \in W_D$

On démontre que si W_D est un ensemble de vérité descendant alors il existe une interprétation i telle que, pour tout φ, <u>si</u> $\varphi \in W_D$ <u>alors</u> $v_i(\varphi) = \mathrm{V}$ (attention : il s'agit d'un "si..., alors...").

3.2.1 Démonstration

On définit une interprétation i par :
– si $p_i \in W_D$. alors $i(p_i) = \mathrm{V}$
– si $\sim p_i \in W_D$. alors $i(p_i) = \mathrm{F}$.
– si ni p_i, ni $\sim p_i$ n'appartiennent à W_D, alors $i(p_i) = \mathrm{V}$ ou F au choix.

On démontre par récurrence sur le degré des formules que, pour cette interprétation i et pour toute formule φ, si $\varphi \in W_D$ alors $v_i(\varphi) = \text{V}$.

– Soit $dg(\varphi) = 0$.
a. φ est donc de la forme p : si $\varphi \in W_D$, i.e.[1] si $p \in W_D$, alors[2] $i(p_i) = \text{V}$, et donc[3] $v_i(p) = \text{V}$, i.e.[1] $v_i(\varphi) = \text{V}$.

– Soit $dg(\varphi) = 1$.
-a'. φ est donc de la forme $\sim p$: si $\varphi \in W_D$, i.e.[1] si $\sim p \in W_D$, alors[2] $i(p_i) = \text{F}$, et donc[3] $v_i(\sim p) = \text{V}$, i.e.[1] $v_i(\varphi) = \text{V}$.

i.e.[1] : par définition de φ.
alors[2] : par la définition de l'interprétation i
donc[3] : par la définition de l'évaluation v_i

– Hypothèse de récurrence : pour toute formule φ, telle que $dg(\varphi) < n$, si $\varphi \in W_D$ alors $v_i(\varphi) = \text{V}$.

– Soit $dg(\varphi) = n$.

- b. φ est de la forme $\sim\sim\psi$: si $\varphi \in W_D$, i.e.[1] si $\sim\sim\psi \in W_D$, alors[2] $\psi \in W_D$ et donc[3] $v_i(\psi) = \text{V}$, d'où[4] $v_i(\sim\sim\psi) = \text{V}$, i.e.[1] $v_i(\varphi) = \text{V}$.

- c. φ est de la forme $\psi \wedge \theta$: si $\varphi \in W_D$, i.e.[1] si $\psi \wedge \theta \in W_D$, alors[2] $\psi \in W_D$ et $\theta \in W_D$ et donc[3] $v_i(\psi) = \text{V}$ et $v_i(\theta) = \text{V}$, d'où[4] $v_i(\psi \wedge \theta) = \text{V}$, i.e.[1] $v_i(\varphi) = \text{V}$.

- c'. φ est de la forme $\sim(\psi \wedge \theta)$: si $\varphi \in W_D$, i.e.[1] si $\sim(\psi \wedge \theta) \in W_D$, alors[2] $\sim\psi \in W_D$ ou $\sim\theta \in W_D$ et donc[3] $v_i(\sim\psi) = \text{V}$ ou $v_i(\sim\theta) = \text{V}$, d'où[4] $v_i(\sim(\psi \wedge \theta)) = \text{V}$, i.e.[1] $v_i(\varphi) = \text{V}$.

- d. φ est de la forme $\psi \vee \theta$: si $\varphi \in W_D$, i.e.[1] si $\psi \vee \theta \in W_D$, alors[2] $\psi \in W_D$ ou $\theta \in W_D$ et donc[3] $v_i(\psi) = \text{V}$ ou $v_i(\theta) = \text{V}$, d'où[4] $v_i(\psi \vee \theta) = \text{V}$, i.e.[1] $v_i(\varphi) = \text{V}$.

- d'. φ est de la forme $\sim(\psi \vee \theta)$: si $\varphi \in W_D$, i.e.[1] si $\sim(\psi \vee \theta) \in W_D$, alors[2] $\sim\psi \in W_D$ et $\sim\theta \in W_D$ et donc[3] $v_i(\sim\psi) = \text{V}$ et $v_i(\sim\theta) = \text{V}$, d'où[4] $v_i(\sim(\psi \vee \theta)) = \text{V}$, i.e.[1] $v_i(\varphi) = \text{V}$.

- e. φ est de la forme $\psi \Rightarrow \theta$: si $\varphi \in W_D$, i.e.[1] si $\psi \Rightarrow \theta \in W_D$, alors[2] $\sim\psi \in W_D$ ou $\theta \in W_D$ et donc[3] $v_i(\sim\psi) = \text{V}$ ou $v_i(\theta) = \text{V}$, d'où[4] $v_i(\psi \Rightarrow \theta) = \text{V}$, i.e.[1] $v_i(\varphi) = \text{V}$.

- e'. φ est de la forme $\sim(\psi \Rightarrow \theta)$: si $\varphi \in W_D$, i.e.[1] si $\sim(\psi \Rightarrow \theta) \in W_D$, alors[2] $\psi \in W_D$ et $\sim\theta \in W_D$ et donc[3] $v_i(\psi) = \text{V}$ et $v_i(\sim\theta) = \text{V}$, d'où[4] $v_i(\sim(\psi \Rightarrow \theta)) = \text{V}$, i.e.[1] $v_i(\varphi) = \text{V}$.

i.e.[1] : par définition de φ.
alors[2] : par la définition de W_D.
donc[3] : en vertu de l'hypothèse de récurrence : $dg(\psi) < n$ et $dg(\theta) < n$.

d'où[4] : par la définition de la fonction v.

Ce qui achève la démonstration.

Remarque : on voit que, étant donné l'interprétation i définie comme ci-dessus, on peut démontrer que, pour toute formule φ, <u>si</u> $\varphi \in W_D$, <u>alors</u> $v_i(\varphi) = \mathrm{V}$, mais on ne peut évidemment pas démontrer la réciproque, à savoir : si $v_i(\varphi) = \mathrm{V}$ alors $\varphi \in W_D$.

4 Méthode des arbres en propositionnel

La "méthode des arbres" est une méthode de preuve indirecte du caractère tautologique (ou non) d'une formule. On cherche à déterminer, non pas si une formule est vraie (ou non) pour toute interprétation des lettres de proposition ($\rightarrow$ table de vérité), mais si sa négation peut être vraie pour au moins une interprétation des lettres de proposition.

En effet, en vertu de ce que l'on a vu, si la négation ($\sim \varphi$) d'une formule est vraie pour une interprétation des lettres de proposition, autrement dit si elle est satisfiable, alors la formule (φ) elle-même est fausse pour la même interprétation et n'est donc pas une tautologie. Si, en revanche, il s'avère que la négation d'une formule n'est pas satisfiable, alors on en conclut que la formule elle-même est tautologique.

> Remarque : cette méthode appliquée aux formules du langage pour la logique des propositions, n'a pas beaucoup d'intérêt pratique, puisque, par ex., la méthode des "tables de vérité" est aussi "efficace", même si elle est plus lourde. Son intérêt est par contre considérable pour les formules du langage pour la logique des prédicats, comme on le verra plus tard ; comme la méthode des arbres appliquée aux formules quantifiées n'est qu'une extension de la même méthode appliquée aux formules du langage pour la logique des propositions, il est important de bien maîtriser cette dernière.

4.1 Principe de la méthode.

La méthode des arbres est une méthode systématique qui permet de trouver toutes les interprétations pour lesquelles une formule est vraie, s'il existe de telles interprétations. Si, donc, au terme de la procédure, aucune interprétation rendant vraie la formule n'est mise en évidence, on peut en conclure en toute certitude que la formule n'est pas satisfiable et est donc contradictoire : sa négation est alors tautologique.

Le ressort de la méthode est le suivant : si une formule est vraie pour une interprétation alors ses sous-formules immédiates, ou leur négation, doivent elles-mêmes être vraies pour la même interprétation. La même chose vaut de ces sous-formules immédiates et de leurs propres sous-formules immédiates etc. de sorte que, de proche en proche, on en arrive à des formules élémentaires (lettres de proposition) ou négations de formule élémentaire, qui doivent être vraies pour la même interprétation pour que la formule dont on est parti soit vraie. On voit que cette procédure repose sur le fait que le mode de formation syntaxique d'une formule est parallèle à son mode d'évaluation (sémantique).

Au terme de cette analyse de la formule de départ deux situations peuvent se présenter :

1. dans l'ensemble des formules élémentaires et négations de formule élémentaire auquel on aboutit, se trouvent une formule élémentaire et sa négation ; en ce cas aucune interprétation ne peut être trouvée qui rendrait vraie la formule de départ ;
2. ou bien ce n'est pas le cas, et la formule de départ est vraie pour une interprétation qui rend vraies les formules élémentaires et fausses les formules élémentaires niées auxquelles l'analyse de la formule a conduit. Les choses sont cependant un peu plus compliquées car le plus

souvent l'analyse met en évidence plusieurs possibilités pour rendre vraie la formule de départ. L'"astuce" de la méthode est de permettre de faire face simplement à cette complication.

4.2 Description de la méthode.

Pour comprendre comment cela fonctionne le plus simple est de prendre un exemple.

Soit la formule : $(p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ dont on veut savoir si elle est tautologique. On se demande donc si sa négation, $\sim\{(p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)\}$, est satisfiable. Supposons la satisfiable.

Puisque cette dernière formule est la négation d'une implication, elle n'est vraie pour une interprétation que si l'antécédent $(p \vee q)$ et la négation du conséquent $\sim(p \Rightarrow q)$ sont vrais pour cette même interprétation (voir la table de l'implication).

On convient de représenter cela en écrivant au dessous de la formule $\sim\{(p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)\}$, les deux formules $(p \vee q)$ et $\sim(p \Rightarrow q)$ l'une sous l'autre :

$$\begin{array}{cl} \sim\{(p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)\} & \qquad (1)^* \\ | & \\ (p \vee q) & \qquad (2) \\ | & \\ \sim(p \Rightarrow q) & \qquad (3) \end{array}$$

Ce qui précède se lit : s'il y a des interprétations qui satisfont (2) et (3), alors les mêmes interprétations satisfont (1). Il s'agit là du début d'un arbre (à l'envers !). L'astérisque signale que l'analyse de (1) est terminée et que l'on n'a plus à s'en soucier.

On repose maintenant la même question que précédemment à propos des formules (2) et (3). Pour des raisons que l'on verra plus loin, on peut commencer par la formule (3) qui est, là encore, une négation d'implication et n'est vraie pour une interprétation que si l'antécédent, p, et la négation du conséquent, $\sim q$, sont vrais pour la même interprétation. On prolonge donc le début de l'arbre ci-dessus en écrivant en dessous, l'une sous l'autre, les deux formules p et $\sim q$, ce qui donne :

$$\begin{array}{cl} \sim\{(p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)\} & \qquad (1)^* \\ | & \\ (p \vee q) & \qquad (2)^* \\ | & \\ \sim(p \Rightarrow q) & \qquad (3)^* \\ | & \\ p & \qquad (4)^* \\ | & \\ \sim q & \qquad (5)^* \end{array}$$

Ce qui se lit maintenant : s'il y a des interprétations qui satisfont (2), (4) et (5) (et donc (3)), les mêmes interprétations satisfont (1). Les astérisques après (4) et (5) indiquent que ces formules ne peuvent plus être analysées. Il reste à examiner à quelle condition (2) peut être vraie pour une interprétation. Une disjonction est vraie lorsque l'un ou l'autre de ses membres est vrai ; deux possibilités s'ouvrent donc pour rendre vraie, pour une interprétation, la disjonction (et donc la formule $\sim\{(p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)\}$) : que p soit vraie pour cette interprétation ou que q soit vraie pour cette interprétation. On pourrait représenter cette circonstance en dédoublant l' « arbre » précédent et en écrivant :

$$
\begin{array}{cc||cc}
\sim\{(p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)\} & (1)^* & \sim\{(p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)\} & (1)^* \\
| & & | & \\
p \vee q & (2)^* & p \vee q & (2)^* \\
| & & | & \\
\sim(p \Rightarrow q) & (3)^* & \sim(p \Rightarrow q) & (3)^* \\
| & & | & \\
p & (4)^* & p & (4)^* \\
| & & | & \\
\sim q & (5)^* & \sim q & (5)^* \\
| & & | & \\
p & (6)^* & q & (6')^* \\
\uparrow & & \mathsf{X} &
\end{array}
$$

Il n'y a maintenant plus rien à faire puisque les dernières formules obtenues sont soit des formules élémentaires, soit des négations de formule élémentaire (d'où les astérisques partout).

Ce qui précède se lit donc : s'il y a une interprétation qui satisfait, (4) et (5) (et donc (3)) et (6) (et donc (2)), cette même interprétation satisfait (1), ou : s'il y a une interprétation qui satisfait (4) et (5) (et donc(3)) et (6') (et donc (2)), cette même interprétation satisfait (1).

Pour déterminer quelles pourraient être ces interprétations, il suffit donc d'essayer d'interpréter par V les formules élémentaires et par F, les formules élémentaires niées qui figurent sur les deux (troncs d') "arbre(s)" et de s'assurer que l'on a bien affaire à des interprétations, i.e. qu'une même lettre de proposition n'est pas "interprétée" simultanément par V et par F. Dans le cas présent, si l'on procède ainsi, on aboutit aux deux résultats suivants :

1. p devrait être interprétée par V (4), q, par F (5) et p, par V (6), si l'on considère l'"arbre" de gauche.
2. p devrait être interprétée par V (4), q par F (5) et q par V (6'), si l'on considère l'"arbre" de droite.

Il est clair que 2. ne fournit aucune interprétation : une même interprétation ne peut rendre q simultanément F et V ; ce que l'on avait indiqué en inscrivant une croix (X) sous l'"arbre" de droite.

Par contre, 1. fournit une interprétation tout à fait satisfaisante : $p \rightarrow$ V et $q \rightarrow$ F ; ce que l'on indique en inscrivant une flèche verticale ($\uparrow$) sous l'"arbre" de gauche.

On vérifie facilement que, pour cette interprétation, la formule $\sim\{(p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)\}$ est vraie :

$$
\begin{array}{cccccccc}
\sim & \{(p & \vee & q) & \Rightarrow & (p & \Rightarrow & q)\} \\
 & \mathrm{V} & & \mathrm{F} & & \mathrm{V} & & \mathrm{F} \\
 & & \mathrm{V} & & & & \mathrm{F} & \\
 & & & & \mathrm{F} & & & \\
\mathrm{V} & & & & & & &
\end{array}
$$

On vérifiera également (à faire !) qu'il n'y a pas d'autre interprétation pour laquelle la formule $\sim\{(p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)\}$ est vraie.

On en conclut que la formule $\{(p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)\}$ n'est pas tautologique puisque sa négation est satisfiable.

La présentation ci-dessus est certes correcte, mais elle est très lourde puisqu'elle oblige à réécrire toutes les formules précédemment "traitées" dès que l'on traite une formule qu'il est possible de rendre vraie de plusieurs manières (au plus deux, en fait) comme c'est la cas des formules de la forme : $\varphi \vee \psi$, $\sim(\varphi \wedge \psi)$ et $\varphi \Rightarrow \psi$.

Pour simplifier la présentation, plutôt que de réécrire toutes les formules, à chaque fois que l'on doit traiter une formule d'une de ces trois formes, on se contente de bifurquer (de créer un embranchement), ce qui donne, pour l'exemple précédent :

$$
\begin{array}{c}
\sim\{(p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)\} \quad (1)^* \\
| \\
p \vee q \quad (2)^* \\
| \\
\sim(p \Rightarrow q) \quad (3)^* \\
| \\
p \quad (4)^* \\
| \\
\sim q \quad (5)^* \\
\diagup \qquad \diagdown \\
\begin{array}{cc}
p \ \ (6)^* & \qquad q \ \ (6')^* \\
\uparrow & \qquad \text{X}
\end{array}
\end{array}
$$

Au lieu donc de réécrire les formules (1) – (5), communes aux deux "arbres" précédents, on les représente comme un tronc commun à deux "branches". On voit que l'appellation d'"arbre" n'est plus totalement injustifiée ; mais l'arbre a ses racines au ciel ! !

Avant de continuer, fixons quelques points de vocabulaire : on appellera

- *formule initiale* de l'arbre, la formule qui apparaît en haut de l'arbre ; ici il s'agit donc de la formule : $\sim\{(p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)\}$;

- *formule pour laquelle* on a fait l'arbre, la formule dont la formule initiale est la négation ; ici il s'agit donc de la formule : $\{(p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)\}$;

- *arbre pour une formule*, l'arbre dont la formule initiale est la négation de celle pour laquelle on a fait l'arbre ;

- *branche* d'un arbre, l'ensemble des formules qui figurent sur un chemin allant de la formule initiale à l'une des extrémités inférieures de l'arbre ; ici il y a deux branches, l'une contient les formules (1), (2), (3), (4), (5) et (6), l'autre contient les formules (1), (2), (3), (4), (5) et (6'). Sur cet exemple, les deux branches ont presque toutes leurs formules en commun, ce qui est loin d'être toujours le cas, comme on le verra sur d'autres exemples ;

– *arbre complet*, un arbre sur lequel il n'y a plus formule à traiter ;

– *branche ouverte*, une branche sur laquelle ne figurent pas une formule élémentaire et sa négation ;

– *branche fermée*, une branche sur laquelle figurent une formule élémentaire et sa négation ;

– *arbre ouvert*, un arbre dont au moins une des branches est ouverte ;

– *arbre fermé*, un arbre dont toutes les branches sont fermées.

En se laissant guider par son solide bon sens logique, on peut maintenant formuler comme suit la condition nécessaire et suffisante pour qu'une formule soit une tautologie :

UNE FORMULE φ EST UNE TAUTOLOGIE SI ET SEULEMENT SI L'ARBRE POUR φ FERME.

Mais !!... comme il faut toujours se méfier du bon sens (même logique !), on démontrera ce théorème dans un instant.

4.3 La méthode des arbres comme procédure mécanique.

Les explications jusqu'ici fournies font appel à la signification des connecteurs et sont donc données en termes sémantiques. Il est facile de voir que l'on peut faire totalement abstraction de ces considérations sémantiques et présenter cette méthode de preuve en termes purement syntaxiques, c'est à dire en ne prenant en compte que la forme des formules et en indiquant des règles de réécriture s'appliquant à des formules selon leur forme (syntaxique). Dans cette perspective, la méthode des arbres est une procédure purement mécanique consistant appliquer des règles de réécriture à des formules, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de formules auxquelles appliquer ces règles. Il est bien vrai que ces règles trouvent leur origine et leur justification dans la considération des conditions de vérité des formules, mais on peut oublier cette origine et n'y voir que des instructions à suivre "aveuglément", ce qu'une machine pourrait tout aussi bien faire qu'une brillante étudiante de philosophie, par ex.

4.3.1 Règles à appliquer pour construire un arbre

$\sim\wedge$:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \sim(\varphi \wedge \psi) \\ \vdots \\ \diagup \quad \diagdown \\ \sim\varphi \quad \sim\psi \end{array}$$

$\wedge$:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \wedge \psi \\ \vdots \\ \varphi \\ | \\ \psi \end{array}$$

$\vee$:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \vee \psi \\ \vdots \\ \diagup \quad \diagdown \\ \varphi \quad \psi \end{array}$$

$\sim\vee$:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \sim(\varphi \vee \psi) \\ \vdots \\ \sim\varphi \\ | \\ \sim\psi \end{array}$$

$\Rightarrow$:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \Rightarrow \psi \\ \vdots \\ \diagup \quad \diagdown \\ \sim\varphi \quad \psi \end{array}$$

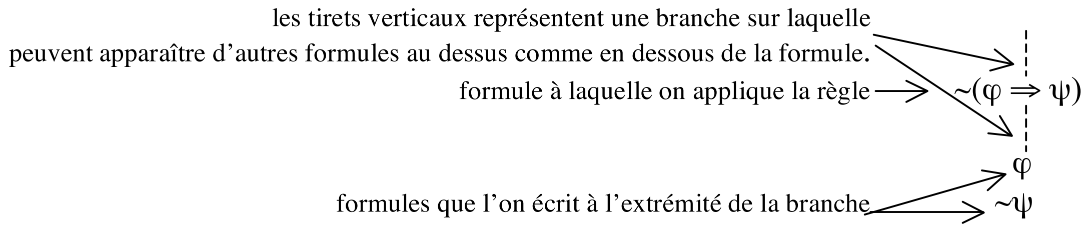
$\sim\Rightarrow$:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \sim(\varphi \Rightarrow \psi) \\ \vdots \\ \varphi \\ | \\ \sim\psi \end{array}$$

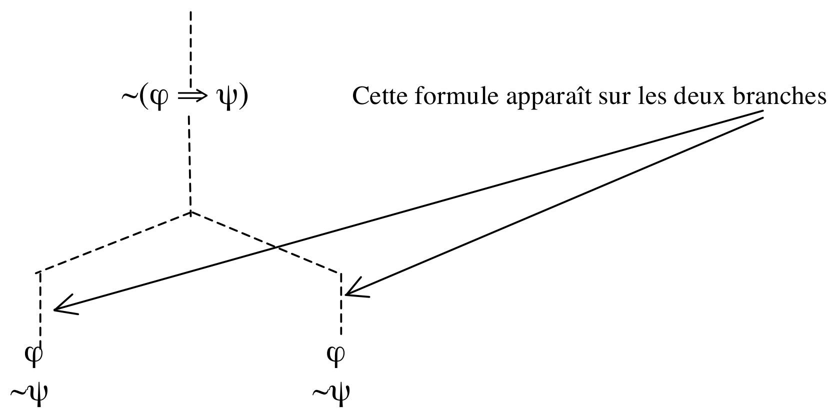
$\sim\sim$:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \sim\sim\varphi \\ \vdots \\ \varphi \end{array}$$

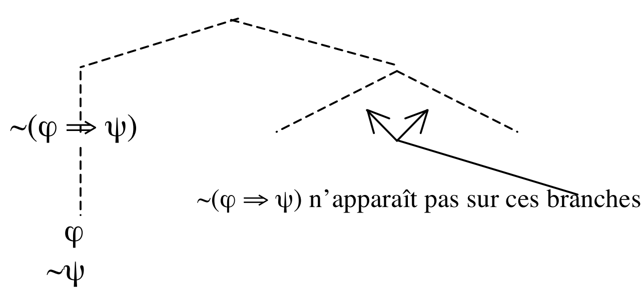
Comment lire ces règles ? Soit, par ex., la règle "$\sim\Rightarrow$" qui s'applique donc à une formule de la forme $\sim(\varphi \Rightarrow \psi)$:



Cette règle, comme toutes les autres, vaut pour toutes les branches sur lesquelles apparaît la formule $\sim(\varphi \Rightarrow \psi)$: il peut en effet se trouver que plus bas sur la branche le traitement d'une autre formule ait conduit à bifurquer ; en ce cas, il faut écrire les deux formules, φ et $\sim\psi$, à l'extrémité de chacune des branches. Ainsi par ex. on peut avoir quelque chose comme :



Par contre, il ne faut pas écrire les deux formules, φ et $\sim\psi$, à l'extrémité de branches sur lesquelles n'apparaît pas la formule $\sim(\varphi \Rightarrow \psi)$, comme dans la situation suivante :



4.3.2 Instructions

– 1er moment : construction de l'arbre.

  – Etape 0 : écrire la négation de la formule pour laquelle on fait l'arbre.
  – Etape 1 : selon la forme de la formule initiale, appliquer l'une des 4 règles : $\sim\wedge$, $\sim\vee$, $\sim\Rightarrow$, $\sim\sim$, à cette formule ; marquer la formule initiale d'une astérisque.
  – Etape 2 : appliquer l'une des 7 règles à l'une des formules écrites à l'étape 1, le choix de la règle étant déterminée par la forme de la formule que l'on choisit de traiter ; marquer la formule traitée d'une astérisque.
  – Etape n : appliquer l'une des 7 règles à une formule écrite à une étape antérieure quelconque et non marquée d'une astérisque, le choix de la règle étant déterminé par la forme de la formule que l'on choisit de traiter ; marquer la formule traitée d'une astérisque.
  – Fin : il n'y a plus que des formules marquées d'une astérisque figurant sur l'arbre.

  L'arbre est maintenant complet.

  Remarques :

  – lorsque le traitement d'une formule conduit à écrire une formule élémentaire (lettre de proposition) ou une négation de formule élémentaire (lettre de proposition précédée du symbole "$\sim$"), on marque d'une astérisque les formules ainsi écrites.

  – lorsque plusieurs formules, non marquées d'une astérisque, sont encore à traiter, l'ordre dans lequel on les traite est *logiquement* indifférent. Par contre, il est judicieux, et écologiquement correct, lorsque le choix s'en présente, de traiter d'abord les formules qui n'entraîneront pas de bifurcation. Cela permet d'avoir un arbre moins proliférant, au tronc éventuellement plus élancé, et donc plus économe d'encre et de papier ; de plus, il sera plus lisible.

– 2ème moment : interprétation.

  On examine maintenant les branches ; deux cas sont possibles :

  – si sur une branche apparaissent une formule élémentaire et sa négation, on met une croix (X) à l'extrémité de la branche. La branche est fermée.

  – si sur une branche n'apparaissent pas une formule élémentaire et sa négation, on met une flèche verticale ($\uparrow$) à l'extrémité de la branche. La branche est ouverte.

  Si toutes les branches sont fermées, on en conclut que la formule initiale n'est pas satisfiable (elle est contradictoire). La formule pour laquelle on a fait l'arbre est donc tautologique.

  Si une branche est ouverte, on en conclut que la formule initiale est satisfiable. La formule pour laquelle on a fait l'arbre n'est donc pas tautologique.

Remarque importante : il suffit de comparer les règles pour la construction d'un arbre avec les clauses qui définissent un ensemble de vérité descendant (cf. section 3.2, p. 7.), pour constater que l'ensemble des formules qui figurent sur une branche ouverte, ensemble qui ne contient donc pas une formule élémentaire et sa négation, est un ensemble de vérité descendant. Un peu plus loin, on profitera de cette heureuse (!!) circonstance pour démontrer que la méthode des arbres est complète.

4.4 Exemples d'arbre.

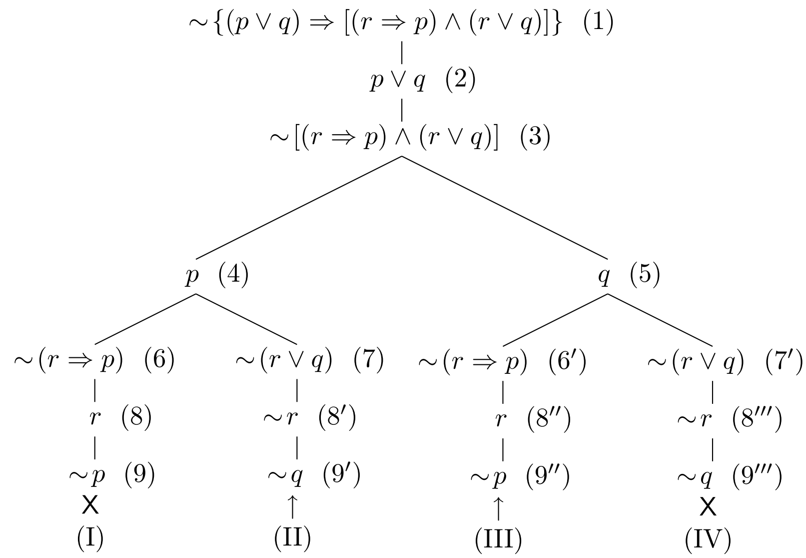
Dans le premier exemple, sont indiquées, en face de chaque formule écrite, la formule dont elle provient et la règle suivie.

1. Soit la formule φ : $[(p \wedge q) \vee r] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \vee r)]$.

Etape 0	$\sim\{[(p \wedge q) \vee r] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \vee r)]\}$		(1)	
Etape 1	$(p \wedge q) \vee r$		(2)	sur (1), règle $\sim \Rightarrow$
	$\sim [(p \Rightarrow (q \vee r)]$		(3)	
Etape 2	p		(4)	sur (3), règle $\sim \Rightarrow$
	$\sim (q \vee r)$		(5)	
Etape 3	$\sim q$		(6)	sur (5), règle $\sim \vee$
	$\sim r$		(7)	
Etape 4	$p \wedge q$	r	(8), (9)	sur (2), règle $\vee$
Etape 5	p	X	(10)	sur (8), règle $\wedge$
	q		(11)	
	X			
	(I)	(II)		

Sur chaque branche, apparaissent une lettre de proposition et la même lettre précédée du symbole de la négation : sur la branche (I), on trouve q et $\sim q$; sur la branche (II), on trouve r et $\sim r$. La formule φ est donc tautologique car sa négation (la formule initiale) n'est pas satisfiable.

2. Soit la formule φ : $(p \vee q) \Rightarrow [(r \Rightarrow p) \wedge (r \vee q)]$



Règles utilisées :
- (2), (3) sont obtenus à partir de (1) par la règle "$\sim\Rightarrow$"
- (4), (5) son obtenus à partir de (2) par la règle "$\vee$"
- (6), (7) et (6′), (7′) sont obtenus à partir de (3) par la règle "$\sim\wedge$"
- (8), (9) et (8″), (9″) sont obtenus à partir de (6) et (6′) respectivement, par la règle "$\sim\Rightarrow$"
- (8′), (9′) et (8‴), (9‴) sont obtenus à partir de (7) et (7′) respectivement, par la règle "$\sim\vee$"

On constate que les branches (II) et (III) sont ouvertes : il y a donc deux interprétations i et i' qui satisfont la formule initiale de l'arbre (i.e. : $\sim\{(p \vee q) \Rightarrow [(r \Rightarrow p) \wedge (r \vee q)]\}$), à savoir :

- branche (II) : $i(p) = \text{V}$, $i(q) = \text{F}$ et $i(r) = \text{F}$
- branche (III) : $i'(p) = \text{F}$, $i'(q) = \text{V}$ et $i'(r) = \text{V}$

La formule pour laquelle on a fait l'arbre n'est donc pas tautologique.

4.5 Méthode des arbres et mise en Forme Normale Disjonctive.

La méthode des arbres peut être comprise comme une manière systématique de mettre en Forme Normale Disjonctive (FND) la formule initiale.

On voit que les règles pour les arbres traitent les implications et négations d'implication comme des disjonctions et des conjonctions, ce qui correspond à la première instruction pour mettre en FND une formule.

De la même manière, les négations de conjonction et de disjonction sont traitées comme des disjonctions de négations et des conjonctions de négations, ce qui correspond à l'usage des lois de de Morgan pour entrer les négations.

Enfin, la réécriture au bas de chaque branche sur laquelle apparaît une formule, des sous-formules ou négations de sous-formule indiquées par les règles, correspond à des opérations de distribution.

Considérons l'exemple 1. ci-dessus :

- Etape 1. : transformation de la négation d'implication (formule (1)) en une conjonction (formules (2) et (3)) :
  $$\dashrightarrow [(p \wedge q) \vee r] \wedge \sim [p \Rightarrow (q \vee r)]$$
- Etape 2 : transformation de la négation d'implication (formule (3)) en une conjonction (formules (4) et (5)) :
  $$\dashrightarrow [(p \wedge q) \vee r] \wedge [p \wedge \sim (q \vee r)]$$
- Etape 3 : De Morgan : on transforme la négation de disjonction (formule (5)) en conjonction de négation (formules (6) et (7)) et on supprime les parenthèses :
  $$\dashrightarrow [(p \wedge q) \vee r] \wedge [p \wedge \sim q \wedge \sim r]$$
- Etape 4 : distribution de la disjonction ((2)) sur la conjonction (formules (4), (6), (7)) :
  $$\dashrightarrow [(p \wedge q) \wedge (p \wedge \sim q \wedge \sim r)] \vee (r \wedge p \wedge \sim q \wedge \sim r)$$
- Etape 5 : suppression des parenthèses autour de la conjonction (formule (8)) :
  $$\dashrightarrow (p \wedge q \wedge p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (r \wedge p \wedge \sim q \wedge \sim r)$$
  qui est une FND de la formule : $\sim \{[(p \wedge q) \vee r] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \vee r)]\}$

On peut la simplifier un petit peu, ce qui donne : $(p \wedge q \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (r \wedge p \wedge \sim q \wedge \sim r)$.

On voit que dans chacun des disjoints, apparaissent une formule élémentaire et sa négation ; cette FND est donc contradictoire, tout comme la formule initiale.

Pour obtenir la FND de la formule initiale d'un arbre, il suffit donc, pour chaque branche, d'écrire la conjonction des formules élémentaires et négations de formule élémentaire qui figurent sur cette branche, puis d'écrire la disjonction des conjonctions ainsi obtenues (et, éventuellement de simplifier, pour la beauté de la chose). Ce qui donne pour la formule de l'exemple 2. ci-dessus :

$$(p \wedge r \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim r \wedge \sim q) \vee (q \wedge r \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim r \wedge \sim q)$$

On simplifie :

$$\perp \vee (p \wedge \sim r \wedge \sim q) \vee (q \wedge r \wedge \sim p) \vee \perp$$

qui est équivalent à :

$$(p \wedge \sim r \wedge \sim q) \vee (q \wedge r \wedge \sim p),$$

FND de la formule initiale à savoir : $\sim \{(p \vee q) \Rightarrow [(r \Rightarrow p) \wedge (r \vee q)]\}$.

Cette FND fait apparaître les deux interprétations pour lesquelles cette formule est vraie.

On obtient maintenant quasi immédiatement une FNC de la formule pour laquelle on a fait l'arbre : en effet cette dernière formule est la négation de la formule initiale et donc est équivalente à la négation de la FND de la formule initiale. La négation d'une FND se transforme par les lois de de Morgan en FNC : il suffit de changer les affirmations en négations et inversement, de changer les conjonctions ($\wedge$) en disjonctions ($\vee$) et inversement, et de supprimer la négation en tête de la FND.

En reprenant l'ex. ci-dessus, cela donne :

FND de $\sim \{(p \vee q) \Rightarrow [(r \Rightarrow p) \wedge (r \vee q)]\}$: $(p \wedge \sim r \wedge \sim q) \vee (q \wedge r \wedge \sim p)$, donc :

$$\sim\sim\{(p \vee q) \Rightarrow [(r \Rightarrow p) \wedge (r \vee q)]\}$$

est équivalente à :

$$\sim[(p \wedge \sim r \wedge \sim q) \vee (q \ \wedge r \wedge \sim p)]$$

c'est à dire que la formule pour laquelle on a fait l'arbre, à savoir :

$$(p \vee q) \Rightarrow [(r \Rightarrow p) \wedge (r \vee q)]$$

est équivalente à :

$$\sim[(p \wedge \sim r \wedge \sim q) \vee (q \ \wedge r \wedge \sim p)]$$

qui est équivalente, par de Morgan, à :

$$\sim(p \wedge \sim r \wedge \sim q) \wedge \sim(q \ \wedge r \wedge \sim p)$$

laquelle formule, toujours par de Morgan, est équivalente à :

$$(\sim p \vee r \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r \vee p)$$

qui en est une FNC de la formule pour laquelle on a fait l'arbre.

On voit donc que l'on peut passer rapidement et simplement de la FND de la formule initiale de l'arbre, à la FNC de la formule pour laquelle on a fait l'arbre, en changeant les affirmations en négations, les négations en affirmations, les disjonctions en conjonctions et les conjonctions en disjonctions ; cela donne pour l'exemple précédent :

FND de la formule initiale :	$(\ p$	$\wedge$	$\sim r$	$\wedge$	$\sim q)$	$\vee$	$(\ q$	$\wedge$	r	$\wedge$	$\sim p)$
FNC de la formule pour laquelle on a fait l'arbre :	$(\sim p$	$\vee$	r	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$(\sim q$	$\vee$	$\sim r$	$\vee$	$p)$

5 Correction (consistance sémantique) et complétude de la méthode des arbres

5.1 Définitions

- en calcul des propositions, une procédure de preuve est *correcte* (ou consistante) si elle ne prouve que des tautologies, i.e. si Pr $\subseteq$ Taut [4].
- en calcul des propositions, une procédure de preuve est *complète* si elle prouve toutes les tautologies, i.e. Taut $\subseteq$ Pr.

Si donc, en calcul des propositions, une procédure de preuve est correcte et complète, on a : Pr $=$ Taut.

Dans le cas de la méthode des arbres, on dira qu'une formule φ est prouvée ssi l'arbre pour φ ferme.

4. Taut = ensemble des tautologies, Pr = ensemble des formules prouvables ;

5.2 Correction de la méthode.

A démontrer : si une formule φ est prouvable alors φ est une tautologie. On va démontrer la contraposée :

- si φ n'est pas une tautologie alors φ n'est pas prouvable, i.e.
- si φ n'est pas une tautologie alors l'arbre pour φ ne ferme pas, i.e.
- si φ n'est pas une tautologie alors l'arbre pour φ comporte au moins une branche ouverte, i.e.
- s'il existe une interprétation pour laquelle $\sim\varphi$ est vraie, alors l'arbre pour φ comporte au moins une branche ouverte.

Pour démontrer cette dernière implication, on va démontrer quelque chose de plus général, à savoir : si à l'étape n de la construction d'un arbre, il existe une branche B telle que toutes les formules qui appartiennent à B sont simultanément satisfiables, alors à l'étape $n+1$ il existe au moins une branche B' telle que toutes les formules qui appartiennent à B' sont simultanément satisfiables [5].

Supposons qu'à l'étape n de la construction d'un arbre, il existe une branche B telle que toutes les formules qui appartiennent à B sont simultanément satisfiables. A l'étape $n+1$, deux cas sont possibles : soit la branche B n'est pas prolongée, soit elle l'est.

- Dans le premier cas, à l'étape $n+1$, trivialement, il existe une branche B' telle que toutes les formules qui appartiennent à B' sont simultanément satisfiables, à savoir B elle-même.

- Dans le second cas, B est prolongée et cela veut dire que l'on a appliqué l'une des 7 règles à une formule φ appartenant à B. Il faut donc examiner ce qui résulte de l'application de chacune de ces 7 règles (on ne le fera ici que pour les règles "$\wedge$" et "$\Rightarrow$") :

  1. si φ est de la forme $\psi \wedge \theta$, alors à l'étape $n+1$, B a été prolongée en une branche B' qui comporte toutes les formules de B, plus ψ et θ (i.e. $B' = B \cup \{\psi, \theta\}$). Or, par hyp., il existe une interprétation, i, pour laquelle $\psi \wedge \theta$, ainsi que toutes les autres formules appartenant à B, sont vraies. En conséquence, en vertu de la règle d'évaluation d'une conjonction, ψ et θ sont vraies pour i ; donc toutes les formules appartenant à B' sont vraies pour i, i.e. toutes les formules qui appartiennent à B' sont simultanément satisfiables.

  2. si φ est de la forme $\psi \Rightarrow \theta$, alors à l'étape $n+1$, B a été prolongée en deux branches B' et B'' qui comportent l'une (B') toutes les formules de B, plus $\sim\psi$ (i.e. $B' = B \cup \{\sim\psi\}$) et l'autre (B''), toutes les formules de B, plus θ (i.e. $B'' = B \cup \{\theta\}$). Or, par hyp., il existe une interprétation, i, pour laquelle $\psi \Rightarrow \theta$, ainsi que toutes les autres formules appartenant à B, sont vraies. En conséquence, en vertu de la règle d'évaluation d'une implication, $\sim\psi$ est vraie pour i ou θ est vraie pour i ; donc toutes les formules appartenant à B' sont vraies pour i, ou toutes les formules appartenant à B'' sont vraies pour i, i.e. toutes les formules qui appartiennent à B' sont simultanément satisfiables ou toutes les formules qui appartiennent à B'' sont simultanément satisfiables.

Même raisonnement pour les autres règles.

5. rappel : chaque application d'une règle pour la construction d'un arbre constitue une étape dans la construction de l'arbre, voir le premier exemple d'arbre ci-dessus.

Achèvement de la démonstration :

Si φ n'est pas une tautologie alors il existe une interprétation i, pour laquelle $\sim\varphi$ est vraie. A l'étape 0 de la construction de l'arbre pour φ, il existe donc une branche dont toutes les formules (à savoir $\sim\varphi$ seulement) sont vraies pour i. Par la démonstration précédente, cela restera vrai aux étapes 1, 2, etc. jusqu'à ce que l'arbre soit complété.

Or si toutes les formules d'une branche sont simultanément satisfiables, cette branche ne peut comporter une formule élémentaire et sa négation ; cette branche reste donc ouverte.

Donc si φ n'est pas une tautologie, l'arbre pour φ comporte au moins une branche ouverte et ne ferme pas. QED.

5.3 Complétude de la méthode des arbres.

A démontrer : si une formule φ est une tautologie alors φ est prouvable. On va démontrer la contraposée :

- si φ n'est pas prouvable alors φ n'est pas une tautologie, i.e.
- si l'arbre pour φ ne ferme pas alors φ n'est pas une tautologie, i.e.
- si l'arbre pour φ comporte au moins une branche ouverte alors φ n'est pas une tautologie, i.e.
- si l'arbre pour φ comporte au moins une branche ouverte alors il existe au moins une interprétation pour laquelle $\sim\varphi$ est vraie.

Supposons que l'arbre pour φ comporte au moins une branche ouverte. $\sim\varphi$ appartient à toutes les branches de l'arbre pour φ, et donc en particulier à la branche ouverte.

Or une branche ouverte est un ensemble de vérité descendant et on a déjà démontré que toutes les formules d'un ensemble de vérité descendant sont vraies pour au moins une interprétation (cf. section 3.2, p. 7.).

Donc il existe au moins une interprétation pour laquelle $\sim\varphi$ est vraie. QED.

5.4 Conclusion.

On a donc démontré, relativement à la méthode des arbres :

- Pr $\subseteq$ Taut (correction de la méthode) et
- Taut $\subseteq$ Pr (complétude de la méthode) ;

d'où il suit : Taut $=$ Pr, i.e.

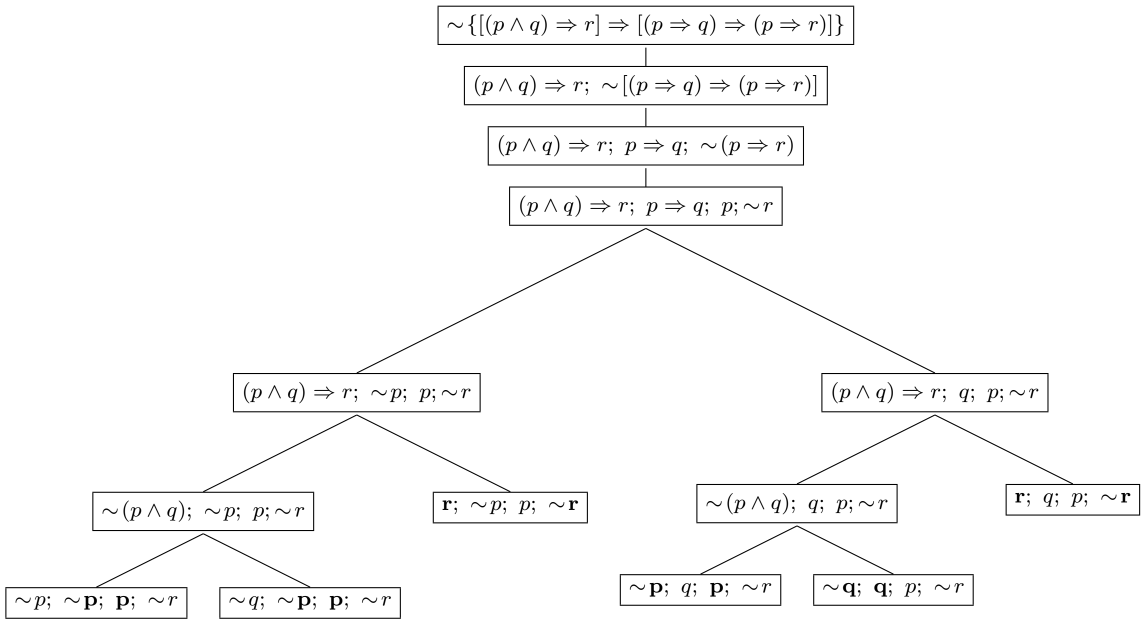
φ EST UNE TAUTOLOGIE SSI L'ARBRE POUR φ FERME.

6 Calcul des séquents

6.1 "Arbres à vignettes" ; identités.

L'arbre pour une formule, s'il ferme, peut être utilisé pour trouver une démonstration dans un nouveau calcul, dit "calcul des séquents", qui est un système axiomatique pour la logique des propositions que l'on présentera dans un instant. En préambule, on présente une autre manière de présenter un arbre qui sera commode pour trouver une telle démonstration.

Soit la formule suivante : $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$. On peut présenter l'arbre pour cette formule de la manière suivante (équivalente à la manière habituelle mais plus lourde) [6] :



On extrait des six "vignettes" terminales les six disjoints de la Forme Normale Disjonctive de la formule initiale de l'arbre, on les convertit par de Morgan en les six conjoints de la Forme Normale Conjonctive de la formule pour laquelle on a fait l'arbre, puis on réorganise les disjonctions :

disjoints de la FND		conjoints de la FNC		réorganisation
$(\sim p \wedge \sim p \wedge p \wedge \sim r)$	$\dashrightarrow$	$(p \vee p \vee \sim p \ \vee r)$	$\dashrightarrow$	$\sim p \vee (p \vee p \vee r)$
$(\sim q \wedge \sim p \wedge p \wedge \sim r)$	$\dashrightarrow$	$(q \vee p \vee \sim p \ \vee r)$	$\dashrightarrow$	$\sim p \vee (q \vee p \vee r)$
$(r \wedge \sim p \wedge p \wedge \sim r)$	$\dashrightarrow$	$(\sim r \vee p \vee \sim p \ \vee r)$	$\dashrightarrow$	$(\sim r \vee \sim p) \vee (p \ \vee r)$
$(\sim p \ \wedge q \wedge p \wedge \sim r)$	$\dashrightarrow$	$(p \vee \sim q \vee \sim p \ \vee r)$	$\dashrightarrow$	$(\sim q \vee \sim p) \vee (p \vee r)$
$(\sim q \wedge q \wedge p \wedge \sim r)$	$\dashrightarrow$	$(q \vee \sim q \vee \sim p \ \vee r)$	$\dashrightarrow$	$(\sim q \vee \sim p) \vee (q \vee r)$
$(r \wedge q \wedge p \wedge \sim r)$	$\dashrightarrow$	$(\sim r \vee \sim q \vee \sim p \ \vee r)$	$\dashrightarrow$	$(\sim r \vee \sim q \vee \sim p) \vee r$

On applique maintenant de Morgan aux disjonctions de négations et on utilise l'équivalence $\vee + \sim / \Rightarrow$ ce qui donne :

6. On trouvera en appendice, p. 37, la table des règles pour ce genre d'arbre.

formules reportées		par De Morgan		$\vee + \sim / \Rightarrow$
$\sim p \vee (p \vee p \vee r)$	$\dashrightarrow$	$\sim p \vee (p \vee p \vee r)$	$\dashrightarrow$	$p \Rightarrow (p \vee p \vee r)$
$\sim p \vee (q \vee p \vee r)$	$\dashrightarrow$	$\sim p \vee (q \vee p \vee r)$	$\dashrightarrow$	$p \Rightarrow (q \vee p \vee r)$
$(\sim r \vee \sim p) \vee (p \vee r)$	$\dashrightarrow$	$\sim (r \wedge p) \vee (p \vee r)$	$\dashrightarrow$	$(r \wedge p) \Rightarrow (p \vee r)$
$(\sim q \vee \sim p) \vee (p \vee r)$	$\dashrightarrow$	$\sim (q \wedge p) \vee (p \vee r)$	$\dashrightarrow$	$(q \wedge p) \Rightarrow (p \vee r)$
$(\sim q \vee \sim p) \vee (q \vee r)$	$\dashrightarrow$	$\sim (q \wedge p) \vee (q \vee r)$	$\dashrightarrow$	$(q \wedge p) \Rightarrow (q \vee r)$
$(\sim r \vee \sim q \vee \sim p) \vee r$	$\dashrightarrow$	$\sim (r \wedge q \wedge p) \vee r$	$\dashrightarrow$	$(r \wedge q \wedge p) \Rightarrow r$

Chacun des conjoints est maintenant de la forme :

$$(p \wedge q_1 \wedge, \ldots, \wedge q_n) \Rightarrow (p \vee r_1 \vee, \ldots, \vee r_m)$$

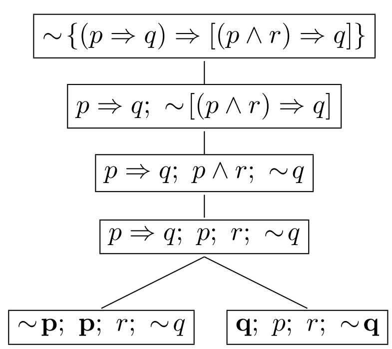
On trouve dans l'antécédent de l'implication une même formule élémentaire p, q, r, etc., que dans le conséquent ; il s'agit donc d'identités (propositionnelles) évidemment tautologiques en vertu des deux "règles d'affaiblissement" suivantes :

1. Affaiblissement à gauche : pour toute interprétation i des lettres de proposition, si l'implication $\varphi \Rightarrow \psi$ est vraie pour i, alors, pour toute formule θ, l'implication $(\varphi \wedge \theta) \Rightarrow \psi$ est également vraie pour i. Autrement dit, $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\varphi \wedge \theta) \Rightarrow \psi)$ est un schéma de tautologie.

2. Affaiblissement à droite : pour toute interprétation i des lettres de proposition, si l'implication $\varphi \Rightarrow \psi$ est vraie pour i, alors, pour toute formule θ, l'implication $\varphi \Rightarrow (\psi \vee \theta)$ est également vraie pour i. Autrement dit, $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \vee \theta))$ est un schéma de tautologie.

Dans le cas présent, $\varphi \Rightarrow \psi$ est de la forme $p \Rightarrow p$ et est donc tautologique ; d'où il suit que $(p \wedge q_1 \wedge, \ldots, \wedge q_n) \Rightarrow (p \vee r_1 \vee, \ldots, \vee r_m)$ est également tautologique, quels que soient n et m.

Autre exemple plus simple et qui justifie la règle d'affaiblissement à gauche : $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow q]$.



On tire des vignettes terminales, de la même manière que précédemment, les identités qui leur correspondent :

disjoints de la FND		conjoints de la FNC		réorganisation
$(\sim p \wedge p \wedge r \wedge \sim q)$	$\dashrightarrow$	$(p \vee \sim p \vee \sim r \vee q)$	$\dashrightarrow$	$(\sim p \vee \sim r) \vee (p \vee q)$
$(q \wedge p \wedge r \wedge \sim q)$	$\dashrightarrow$	$(\sim q \vee \sim p \vee \sim r \vee q)$	$\dashrightarrow$	$(\sim q \vee \sim p \vee \sim r) \vee q$

On applique maintenant de Morgan aux disjonctions de négations et on utilise l'équivalence $\vee + \sim / \Rightarrow$ ce qui donne :

formules reportées		par De Morgan		$\vee + \sim / \Rightarrow$
$(\sim p \vee \sim r) \vee (p \vee q)$	$\dashrightarrow$	$\sim (p \wedge r) \vee (p \vee q)$	$\dashrightarrow$	$(p \wedge r) \Rightarrow (p \vee q)$
$(\sim q \vee \sim p \vee \sim r) \vee q$	$\dashrightarrow$	$\sim (q \wedge p \wedge r) \vee q$	$\dashrightarrow$	$(q \wedge p \wedge r) \Rightarrow q$

Chacun des conjoints est bien, là encore, de la forme : $(p \wedge q_1 \wedge, \ldots, \wedge q_n) \Rightarrow (p \vee r_1 \vee, \ldots, \vee r_m)$

6.2 Définition d'un séquent ; séquent tautologique.

Définition : un *séquent* est une suite de la forme $\Phi \rightarrow \Psi$ dans laquelle Φ et Ψ désignent des ensembles finis de formules de L et qui se lit (prosaïquement !) "Φ flèche Ψ" (!). A noter : $\Phi \rightarrow \Psi$ n'est pas une formule du langage, mais appartient au métalangage [7].

Un séquent est *vrai* pour une interprétation i, ssi, si toutes les formules appartenant à Φ sont vraies pour i, alors au moins une formule appartenant à Ψ est vraie pour i (ou, ce qui revient au même : si au moins une formule appartenant à Φ est fausse pour i ou au moins une formule appartenant à Ψ est vraie pour i)

Un séquent est *tautologique* ssi il est vrai pour toute interprétation ; i.e. une séquent est tautologique ssi, pour toute interprétation i, si toutes les formules appartenant à Φ sont vraies pour i alors au moins une formule appartenant à Ψ est vraie pour i, ce que l'on peut formuler également : un séquent est tautologique ssi il n'existe pas d'interprétation i telle que toutes les formules appartenant à Φ soient vraies pour i et toutes les formules appartenant à Ψ soient fausses pour i.

Cela revient à dire qu'un séquent est tautologique ssi l'implication dont l'antécédent est la conjonction des formules appartenant à Φ et le conséquent est la disjonction des formules appartenant à Ψ, est tautologique : autrement dit, si $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ et $\Psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$, $\Phi \rightarrow \Psi$ est tautologique ssi l'implication

$$(\varphi_1 \wedge, \ldots, \wedge \varphi_n) \Rightarrow (\psi_1 \vee, \ldots, \vee \psi_m)$$

est tautologique (au sens habituel).

7. On appellera Φ, l'antécédent du séquent $\Phi \rightarrow \Psi$ et Ψ son conséquent. **Attention à la différence entre la flèche simple des séquents ($\rightarrow$) et la flèche double de l'implication ($\Rightarrow$).**

Ainsi, si Φ et Ψ sont des ensembles de formules *élémentaires*, on a : un séquent $\Phi \rightarrow \Psi$ (que l'on peut appeler alors, *séquent élémentaire*) est tautologique ssi au moins une même formule élémentaire appartient simultanément à Φ et à Ψ .

Lorsque le séquent $\Phi \rightarrow \Psi$ est tautologique, on peut le lire : "de Φ, on peut tirer Ψ".

Remarque importante :

- si un séquent $\Phi \rightarrow \Psi$ est tautologique et que $\Phi = \emptyset$ (ce que l'on note simplement : $\rightarrow \Psi$) alors pour toute interprétation i, au moins une formule appartenant à Ψ est vraie pour i, ou si l'on veut : la disjonction des formules appartenant à Ψ est tautologique.
  Pour comprendre cela, il suffit de remarquer que dans ce cas, comme aucune formule n'appartient à Φ, il n'existe pas d'interprétation qui pourrait rendre une formule de Φ fausse ; si, donc, le séquent est tautologique, c'est que, pour toute interprétation i, au moins une formule appartenant à Ψ est vraie pour i.

- De la même manière : si un séquent $\Phi \rightarrow \Psi$ est tautologique et que $\Psi = \emptyset$ (ce que l'on note simplement : $\Phi \rightarrow$) alors, pour toute interprétation i, au moins une formule appartenant à Φ est fausse pour i, ou si l'on veut : la conjonction des formules appartenant à Φ est contradictoire.
  Là encore, pour comprendre cela, il suffit de remarquer que dans ce cas, comme aucune formule n'appartient à Ψ, il n'existe pas d'interprétation qui pourrait rendre une formule de Ψ vraie ; si, donc, le séquent est tautologique, c'est que, pour toute interprétation i, au moins une formule appartenant à Φ est fausse pour i.

6.3 Règles d'inférence pour le calcul des séquents.

On peut maintenant comprendre comment l'on peut "raisonner" sur des séquents, c'est à dire inférer un séquent d'un ou de deux autres séquents. Pour comprendre cela de manière simple et intuitive, on va considérer trois exemples d'inférence [8].

Exemple 1. Soit les deux séquents admis comme tautologiques suivants : $\Phi \rightarrow \Psi, \theta$ et $\Phi \rightarrow \Psi, \lambda$. Considérons maintenant le séquent $\Phi \rightarrow \Psi, \theta \wedge \lambda$. On montre que si ce dernier séquent n'est pas tautologique, alors au moins l'un des deux précédents n'est pas non plus tautologique.

Supposons que $\Phi \rightarrow \Psi, \theta \wedge \lambda$ ne soit pas tautologique. Il existe alors une interprétation i telle que toutes les formules appartenant à Φ sont vraies pour i et toutes les formules de $\Psi \cup \{\theta \wedge \lambda\}$ sont fausses pour i. D'où il suit que toutes les formules appartenant à Ψ sont fausses pour i et que $v_i(\theta \wedge \lambda) = \mathrm{F}$, c'est à dire que $v_i(\theta) = \mathrm{F}$ ou que $v_i(\lambda) = \mathrm{F}$; et donc toutes les formules appartenant à $\Psi \cup \{\theta\}$ sont fausses pour i ou toutes les formules appartenant $\Psi \cup \{\lambda\}$ sont fausses pour i. Il en résulte que, pour cette interprétaion i,

- toutes les formules appartenant à Φ sont vraies et toutes celles appartenant à $\Psi \cup \{\theta\}$ sont fausses
  ou

8. Dans ce qui suit, on notera $\Phi, \theta \rightarrow \Psi, \lambda$ un séquent dont l'antécédent comporte toutes les formules appartenant à Φ, plus la formule θ (i.e. toutes les formules appartenant à $\Phi \cup \{\theta\}$) et le conséquent, toutes les formules appartenant à Ψ plus la formule λ (i.e. toutes les formules appartenant à $\Psi \cup \{\lambda\}$).

- toutes les formules appartenant à Φ sont vraies et toutes celles appartenant à $\Psi \cup \{\lambda\}$ sont fausses.

L'un ou l'autre (au moins !) des deux séquents $\Phi \to \Psi, \theta$ et $\Phi \to \Psi, \lambda$. n'est donc pas tautologique [9].

Par contraposition, on en tire que si les deux séquents $\Phi \to \Psi, \theta$ et $\Phi \to \Psi, \lambda$ sont tautologiques, alors le séquent $\Phi \to \Psi, \theta \wedge \lambda$ est lui même tautologique. On peut donc en tirer la règle suivante :

$$\frac{\Phi \to \Psi, \theta \qquad\qquad\qquad \Phi \to \Psi, \lambda}{\Phi \to \Psi, \theta \wedge \lambda}$$

Exemple 2. Soit les deux séquents : $\Phi \to \Psi, \theta$ et $\Phi, \lambda \to \Psi$ et considérons le séquent $\Phi, \theta \Rightarrow \lambda \to \Psi$. On montre, toujours par contraposition, que si les deux premiers séquents sont tautologiques alors le troisième l'est également.

Supposons que $\Phi, \theta \Rightarrow \lambda \to \Psi$ ne soit pas tautologique. Il existe alors une interprétation i telle que toutes les formules appartenant à $\Phi \cup \{\theta \Rightarrow \lambda\}$ sont vraies pour i (et en particulier toutes les formules appartenant à Φ sont vraies pour i) et toutes les formules appartenant à Ψ sont fausses pour i. D'où il suit, en particulier que $v_i(\theta \Rightarrow \lambda) = \mathrm{V}$, c'est à dire que $v_i(\theta) = \mathrm{F}$ **ou** que $v_i(\lambda) = \mathrm{V}$; et donc toutes les formules appartenant à $\Psi \cup \{\theta\}$ sont fausses pour i **ou** toutes les formules appartenant $\Phi \cup \{\lambda\}$ sont vraies pour i. Il en résulte que pour cette interprétation i,

- toutes les formules appartenant à Φ sont vraies et toutes celles appartenant à $\Psi \cup \{\theta\}$ sont fausses

  ou
- toutes les formules appartenant à $\Phi \cup \{\lambda\}$ sont vraies et toutes celles appartenant à Ψ sont fausses.

L'un ou l'autre (au moins !) des deux séquents $\Phi \to \Psi, \theta$, $\Phi, \lambda \to \Psi$ n'est donc pas tautologique.

Par contraposition, on en tire que si les deux séquents $\Phi \to \Psi, \theta$ et $\Phi, \lambda \to \Psi$ sont tautologiques, le séquent $\Phi, \theta \Rightarrow \lambda \to \Psi$ est lui même tautologique. On peut donc en tirer la règle suivante :

---

9. On peut réécrire cette argumentation de manière plus sobre en utilisant les notations habituelles : supposons que $\Phi \to \Psi, \theta \wedge \lambda$ ne soit pas tautologique. Il existe alors une interprétation i telle que pour tout $\varphi \in \Phi$, $v_i(\varphi) = \mathrm{V}$ et que pour tout $\varphi \in \Psi \cup \{\theta \wedge \lambda\}$, $v_i(\varphi) = \mathrm{F}$. D'où il suit, en particulier que $v_i(\theta \wedge \lambda) = \mathrm{F}$, c'est à dire que $v_i(\theta) = \mathrm{F}$ ou que $v_i(\lambda) = \mathrm{F}$; et donc pour tout $\varphi \in \Psi \cup \{\theta\}$, $v_i(\varphi) = \mathrm{F}$ ou pour tout $\varphi \in \Psi \cup \{\lambda\}$, $v_i(\varphi) = \mathrm{F}$. Il en résulte que pour cette interprétation i,
   - pour tout $\varphi \in \Phi$, $v_i(\varphi) = \mathrm{V}$ et, pour tout $\varphi \in \Psi \cup \{\theta\}$, $v_i(\varphi) = \mathrm{F}$

     ou
   - pour tout $\varphi \in \Phi$, $v_i(\varphi) = \mathrm{V}$ et, pour tout $\varphi \in \Psi \cup \{\lambda\}$, $v_i(\varphi) = \mathrm{F}$.

   L'un ou l'autre (au moins !) des deux séquents $\Phi \to \Psi, \theta$, $\Phi \to \Psi, \lambda$ n'est donc pas tautologique

$$\frac{\Phi \to \Psi, \theta \qquad\qquad \Phi, \lambda \to \Psi}{\Phi, \theta \Rightarrow \lambda \to \Psi}$$

Exemple 3. Soit le séquent : $\Phi, \theta \to \Psi, \lambda$ et considérons le séquent $\Phi \to \Psi, \theta \Rightarrow \lambda$. On montre, toujours par contraposition, que si le premier séquent est tautologique alors le deuxième l'est également.

Supposons que $\Phi \to \Psi, \theta \Rightarrow \lambda$ ne soit pas tautologique. Il existe alors une interprétation i telle que toutes les formules appartenant à Φ sont vraies pour i et toutes les formules appartenant à $\Psi \cup \{\theta \Rightarrow \lambda\}$ sont fausses pour i (et donc toutes les formules appartenant à Ψ sont fausses pour i). D'où il suit, en particulier que $v_i(\theta \Rightarrow \lambda) = \mathrm{F}$, c'est à dire que $v_i(\theta) = \mathrm{V}$ **et** que $v_i(\lambda) = \mathrm{F}$; et donc toutes les formules appartenant à $\Phi \cup \{\theta\}$ sont vraies pour i **et** toutes les formules appartenant à $\Psi \cup \{\lambda\}$ sont fausses pour i.
Donc le séquent $\Phi, \theta \to \Psi, \lambda$ n'est pas tautologique.

Par contraposition, on en tire que si le séquent $\Phi, \theta \to \Psi, \lambda$ est tautologique, le séquent $\Phi \to \Psi, \theta \Rightarrow \lambda$ est lui même tautologique. On peut donc en tirer la règle suivante :

$$\frac{\Phi, \theta \to \Psi, \lambda}{\Phi \to \Psi, \theta \Rightarrow \lambda}$$

On constate sur ces exemples que ces règles consistent à *introduire* un connecteur soit à gauche de la flèche "$\to$" (exemple 2, introduction de l'implication), soit à droite de la flèche "$\to$"(exemple 1 et 3, introduction de la conjonction et de l'implication). Les règles d'inférence du calcul des séquents sont ainsi, en général, des règles *d'introduction*, à gauche ou à droite de "$\to$", des connecteurs. Il y a donc pour les quatre connecteurs ($\wedge, \vee, \Rightarrow \sim$) huit règles qui sont regroupées dans la table suivante (dans laquelle on retrouve les trois règles prises en exemple).

Table des règles pour le calcul des séquents		
	Introduction à gauche	Introduction à droite
$\wedge$	$\frac{\Phi, \theta, \lambda \to \Psi}{\Phi, \theta \wedge \lambda \to \Psi}$	$\frac{\Phi \to \Psi, \theta \qquad \Phi \to \Psi, \lambda}{\Phi \to \Psi, \theta \wedge \lambda}$
$\vee$	$\frac{\Phi, \theta \to \Psi \qquad \Phi, \lambda \to \Psi}{\Phi, \theta \vee \lambda \to \Psi}$	$\frac{\Phi \to \Psi, \theta, \lambda}{\Phi \to \Psi, \theta \vee \lambda}$
$\Rightarrow$	$\frac{\Phi \to \Psi, \theta \qquad \Phi, \lambda \to \Psi}{\Phi, \theta \Rightarrow \lambda \to \Psi}$	$\frac{\Phi, \theta \to \Psi, \lambda}{\Phi \to \Psi, \theta \Rightarrow \lambda}$
$\sim$	$\frac{\Phi \to \Psi, \theta}{\Phi, \sim\theta \to \Psi}$	$\frac{\Phi, \theta \to \Psi}{\Phi \to \Psi, \sim\theta}$

6.4 Démonstration en calcul des séquents

Une démonstration en calcul des séquents part d'axiomes qui sont tous des instances du schéma d'axiome suivant : $\Phi, \theta \rightarrow \Psi, \theta$. A partir d'une certain nombre d'axiomes de cette forme il est possible de parvenir, en appliquant les règles ci-dessus, à "reconstituer" la tautologie que l'on cherche à démontrer à droite de la flèche de séquent. Autrement dit, si l'on cherche à démontrer la tautologie φ, il s'agit de parvenir au séquent $\rightarrow \varphi$. En vertu de la remarque faite plus haut, si ce *séquent* est tautologique, - ce qui est le cas s'il a été obtenu par application des règles sur des axiomes, eux-mêmes tautologiques -, alors la *formule* φ est tautologique (au sens habituelle de la logique des propositions) [10].

Pour comprendre comment s'effectue une démonstration dans le calcul des séquents, le plus simple est de prendre des exemples.

1. Soit à démontrer la tautologie $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ à partir des deux séquents $p \rightarrow q, p$ et $p, q \rightarrow q$.
   Il est clair que ces deux séquents sont des instances du schéma d'axiome ci-dessus, si l'on fait $\Phi = \emptyset$, $\Psi = \{q\}$ et $\theta = p$ pour le premier, et $\Phi = \{p\}$, $\Psi = \emptyset$ et $\theta = q$ pour le deuxième. Ce sont donc des axiomes [11].

   On peut présenter les choses ainsi, la lecture s'effectuant de haut en bas ; les formules en gras sur une ligne sont celles qui sont utilisées pour passer à la ligne du dessous à l'aide la règle indiquée en regard de cette ligne de dessous (on ne l'a pas fait pour l'avant dernière ligne, les choses étant évidentes) :

10. On peut donc considérer le calcul des séquents comme un système axiomatique, ayant un schéma d'axiome, $\Phi, \theta \rightarrow \Psi, \theta$, et les huit règles d'inférence indiquées dans le tableau.

11. Plus simplement : puisqu'il s'agit de séquents élémentaires, il suffit de remarquer qu'ils satisfont la condition indiquée précédemment pour être tautologique (cf. section 6.2, p. 28), à savoir qu'une même formule élémentaire figure à gauche et à droite de la flèche.

$p \to q, \mathbf{p} \qquad p, \mathbf{q} \to q$	axiomes
$\mathbf{p}, p \Rightarrow q \to q$	introduction à gauche de $\Rightarrow$
$p \Rightarrow q \to \mathbf{q}, \sim p$	introduction à droite de $\sim$
$p \Rightarrow q, \sim\mathbf{q} \to \sim\mathbf{p}$	introduction à gauche de $\sim$
$(p \Rightarrow q) \to (\sim q \Rightarrow \sim p)$	introduction à droite de $\Rightarrow$
$\to (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$	introduction à droite de $\Rightarrow$

Remarque importante : l'usage de la règle d'introduction à gauche de "$\Rightarrow$" est légitime puisque les deux axiomes sont de la forme $\Phi \to \Psi, p$ et $\Phi, q \to \Psi$, avec $\Phi = \{p\}$ et $\Psi = \{q\}$. Il importe en effet, pour l'application des règles qui permettent d'inférer un séquent de deux séquents, de s'assurer que les ensembles de formules Φ et Ψ sont bien identiques dans les deux séquents.

2. Soit, maintenant, à démontrer la tautologie $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow q]$ à partir des deux séquents : $p, r \to p, q$ et $q, p, r \to q$.
   Il est clair que ces deux séquents sont des instances du schéma d'axiome ci-dessus, si l'on fait $\Phi = \{r\}$, $\Psi = \{q\}$ et $\theta = p$ pour le premier, et $\Phi = \{p, r\}$, $\Psi = \emptyset$ et $\theta = q$ pour le deuxième. Ce sont donc des axiomes.

   On procède comme précédemment :

$p, r \to \mathbf{p}, q \qquad \mathbf{q}, p, r \to q$	axiomes
$p \Rightarrow q, \mathbf{p}, \mathbf{r} \to q$	introduction à gauche de $\Rightarrow$
$p \Rightarrow q, \mathbf{p} \wedge \mathbf{r} \to \mathbf{q}$	introduction à gauche de $\wedge$
$p \Rightarrow q \to (p \wedge r) \Rightarrow q$	introduction à droite de $\Rightarrow$
$\to (p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow q]$	introduction à droite de $\Rightarrow$

6.5 Relations entre séquents et arbres

On peut évidemment se demander comment l'on a trouvé aussi bien les axiomes à partir desquels s'effectue la démonstration que la démarche qui, à partir des axiomes, conduit à ces tautologies. On peut tout d'abord répondre à ces deux questions en considérant ces démonstrations dans le sens du bas vers le haut.

Considérons la première démonstration et le séquent par laquelle elle se termine : $\rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$.

Supposons que ce séquent puisse être faux, autrement dit qu'il existe une interprétation i qui rende fausse la seule formule apparaissant à droite de la flèche, à savoir $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$; on aurait ainsi $v_i(p \Rightarrow q) = \mathrm{V}$ et $v_i(\sim q \Rightarrow \sim p) = \mathrm{F}$; alors le séquent $(p \Rightarrow q) \rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ serait lui-même faux pour la même interprétation i puisque, pour celle-ci, toutes les formules à gauche de la flèche seraient vraies (ici il n'y a que la formule $p \Rightarrow q$) et toutes les formules à droite de la flèche, fausses (ici il n'y a que la seule formule $\sim q \Rightarrow \sim p$).

Répétons ce même raisonnement pour le séquent $(p \Rightarrow q) \rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$; si ce dernier était faux pour i, alors $v_i(p \Rightarrow q) = \mathrm{V}$ et $v_i(\sim q \Rightarrow \sim p) = \mathrm{F}$, c'est à dire : $v_i(p \Rightarrow q) = \mathrm{V}$, $v_i(\sim q) = \mathrm{V}$ et $v_i(\sim p) = \mathrm{F}$; donc le séquent $p \Rightarrow q, \sim q \rightarrow \sim p$ serait lui même faux pour i puisque, pour i, toutes les formules à gauche de la flèche seraient vraies et toutes celles qui sont à droite, fausses.

Si l'on répète encore ce petit raisonnement, on arrive au séquent $p, p \Rightarrow q \rightarrow q$, que l'on suppose donc faux pour i. Si tel était le cas, alors $v_i(p) = \mathrm{V}$, $v_i(p \Rightarrow q) = \mathrm{V}$ et $v_i(q) = \mathrm{F}$; d'où, puisque $v_i(p \Rightarrow q) = \mathrm{V}$, $v_i(p) = \mathrm{F}$ ou $v_i(q) = \mathrm{V}$. Donc, l'un des deux séquents (ou les deux !) $p \rightarrow q, p$ ou $p, q \rightarrow q$ serait faux pour i.

Mais cela est absurde : il ne peut exister d'interprétation qui rende faux l'un ou l'autre des deux séquents, puisque, dans l'un comme dans l'autre, on trouve une même formule élémentaire à gauche et à droite de la flèche et qu'il faudrait donc qu'il existe une interprétation i qui rende simultanément vraie et fausse une même formule élémentaire.

On a donc montré, pour la formule $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$, que s'il y avait une interprétation i telle que $v_i((p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)) = \mathrm{F}$ et donc telle que le séquent $\rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ soit faux pour i, alors l'un, au moins, des deux séquents "élémentaires", $p \rightarrow q, p$ ou $p, q \rightarrow q$, devrait être lui-même faux pour i. Or il se trouve que ces séquents élémentaires ne peuvent être faux pour aucune interprétation (ils sont tautologiques) ; on en conclut (*Modus Tollens*) qu'il n'existe pas d'interprétation qui pourrait rendre faux le séquent : $\rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$.

Il suffit maintenant de retourner ce raisonnement et l'on retrouve la démonstration (du haut vers le bas) que l'on a présentée ci-dessus.

Ce qui précède peut sembler un peu laborieux, mais un instant d'attention permet de remarquer que, pour remonter du bas vers le haut, on n'a fait qu'utiliser informellement les règles qui président à la construction d'un arbre.

6.5.1 Arbres à vignettes et démonstrations dans le calcul des séquents

Les "arbres à vignettes" peuvent donc servir, d'une part à trouver les axiomes à partir desquels s'effectue la démonstration dans le calcul des séquents, d'autre part à indiquer la marche de cette démonstration.

Considérons le deuxième exemple d'arbre à vignettes présenté ci-dessus (cf. p. 26) pour la formule $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow q]$, qui correspond au deuxième exemple de démonstration dans le calcul des séquents (cf. p. 32). Des vignettes terminales, on avait tiré les "identités" : $(p \wedge r) \Rightarrow (p \vee q)$ et $(q \wedge p \ \wedge r) \Rightarrow q$. A chacune de ces formules correspond donc un séquent tautologique :

$$(p \wedge r) \Rightarrow (p \vee q) \quad \dashrightarrow \quad p, r \rightarrow p, q$$

$$(q \wedge p \wedge r) \Rightarrow q \quad \dashrightarrow \quad q, p, r \rightarrow q$$

Ces deux séquents sont les axiomes que l'on avait utilisés pour la démonstration dans le calcul des séquents de la formule.

Il suffit maintenant de se servir de l'arbre comme guide pour effectuer la démonstration dans le calcul des séquents. Mettons en regard de la démonstration dans le calcul des séquents, l'arbre à vignette pour la formule $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow q]$:

1. $p, r \rightarrow \mathbf{p}, q$ 2. $\mathbf{q}, p, r \rightarrow q$

3. $p \Rightarrow q, \mathbf{p}, \mathbf{r} \rightarrow q$

4. $p \Rightarrow q, \mathbf{p} \wedge \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{q}$

5. $p \Rightarrow q \rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow q]$

6. $\rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow q]$

6. $\boxed{\sim\{(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow q]\}}$

5. $\boxed{p \Rightarrow q;\ \sim[(p \wedge r) \Rightarrow q]}$

4. $\boxed{p \Rightarrow q;\ p \wedge r;\ \sim q}$

3. $\boxed{p \Rightarrow q;\ p;\ r;\ \sim q}$

1. $\boxed{\sim\mathbf{p};\ \mathbf{p};\ r;\ \sim q}$ 2. $\boxed{\mathbf{q};\ p;\ r;\ \sim\mathbf{q}}$

A chaque vignette correspond un séquent ; par ex.à la vignette 3. : $\boxed{p \Rightarrow q;\ p;\ r;\ \sim q}$ correspond le séquent 3. : $p \Rightarrow q, p, r \rightarrow q$; à la vignette 4., $\boxed{p \Rightarrow q;\ p \wedge r;\ \sim q}$, correspond le séquent 4. : $p \Rightarrow q, p \wedge r \rightarrow q$, etc.

On passe d'une vignette au séquent correspondant en écrivant à gauche de la flèche de séquent les formules affirmées et à droite les formules niées (en supprimant la négation).

On applique maintenant les règles pour le calcul des séquents en "remontant" l'arbre : puisque, par ex., de la vignette 4. on passe à la vignette 3. par application de la règle (pour les arbres) pour la conjonction (ce qui revient à "éliminer" la conjonction), on passe du séquent 3. au séquent 4. par application de la règle d'introduction à gauche de la conjonction, etc.

En général, à chaque règle pour les arbres, - que l'on peut donc considérer comme une règle d'élimination - , correspond une règle d'introduction dans le calcul des séquents ; ainsi à la règle (arbre) pour une négation de conjonction correspond la règle d'introduction à droite de la conjonction ; à la règle (arbre) pour l'implication correspond la règle d'introduction au gauche de l'implication, etc.

On a donc le tableau de correspondance suivant :

règles pour les arbres		règles pour le calcul des séquents
règle $\wedge$	$\dashrightarrow$	règle d'introduction à gauche de $\wedge$
règle $\sim\wedge$	$\dashrightarrow$	règle d'introduction à droite de $\wedge$
règle $\vee$	$\dashrightarrow$	règle d'introduction à gauche de $\vee$
règle $\sim\vee$	$\dashrightarrow$	règle d'introduction à droite de $\vee$
règle $\Rightarrow$	$\dashrightarrow$	règle d'introduction à gauche de $\Rightarrow$
règle $\sim\Rightarrow$	$\dashrightarrow$	règle d'introduction à droite de $\Rightarrow$

Voilà un exemple, un peu plus compliqué (!), de démonstration dans le calcul des séquents de la formule pour laquelle on avait fait le premier arbre à vignette : $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ (cf. p. 25).

Les six vignettes terminales fournissent les six séquents tautologiques qui vont servir d'axiomes selon le tableau suivant :

$$\begin{array}{lcl}
p \Rightarrow (p \vee p \vee r) & \dashrightarrow & p \rightarrow p, p, r \\
p \Rightarrow (q \vee p \vee r) & \dashrightarrow & p \ \rightarrow q, p, r \\
(r \wedge p) \Rightarrow (p \ \vee r) & \dashrightarrow & r, p \rightarrow p, r \\
(q \wedge p) \Rightarrow (p \vee r) & \dashrightarrow & q, p \rightarrow p, r \\
(q \wedge p) \Rightarrow (q \vee r) & \dashrightarrow & q, p, \rightarrow q, r \\
(r \wedge q \wedge p) \Rightarrow r & \dashrightarrow & r, q, p, \rightarrow r
\end{array}$$

En se référant à l'arbre à vignettes, on a alors la démonstration suivante dans le calcul des séquents (à titre d'exercice, on se demandera quelles règles d'introduction ont été appliquées à chaque étape de la démonstration) :

$$
\begin{array}{cccccccc}
p \rightarrow p,\ p,\ r & & p\ \rightarrow q,\ p,\ r & & q,\ p \rightarrow p,\ r & & q,\ p, \rightarrow q,\ r & \\
\searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & \\
& p \rightarrow p \wedge q,\ p,\ r & & r,\ p \rightarrow p,\ r & & q,\ p,\ \rightarrow p \wedge q,\ r & & r,\ q,\ p \rightarrow r \\
& \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow \\
& & (p \wedge q) \Rightarrow r,\ p \rightarrow p,\ r & & & & (p \wedge q) \Rightarrow r,\ q,\ p, \rightarrow r & \\
& & \searrow & & & & \swarrow & \\
& & & & (p \wedge q) \Rightarrow r,\ p \Rightarrow q,\ p \rightarrow r & & &
\end{array}
$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow r,\ p \Rightarrow q \rightarrow p \Rightarrow r$$

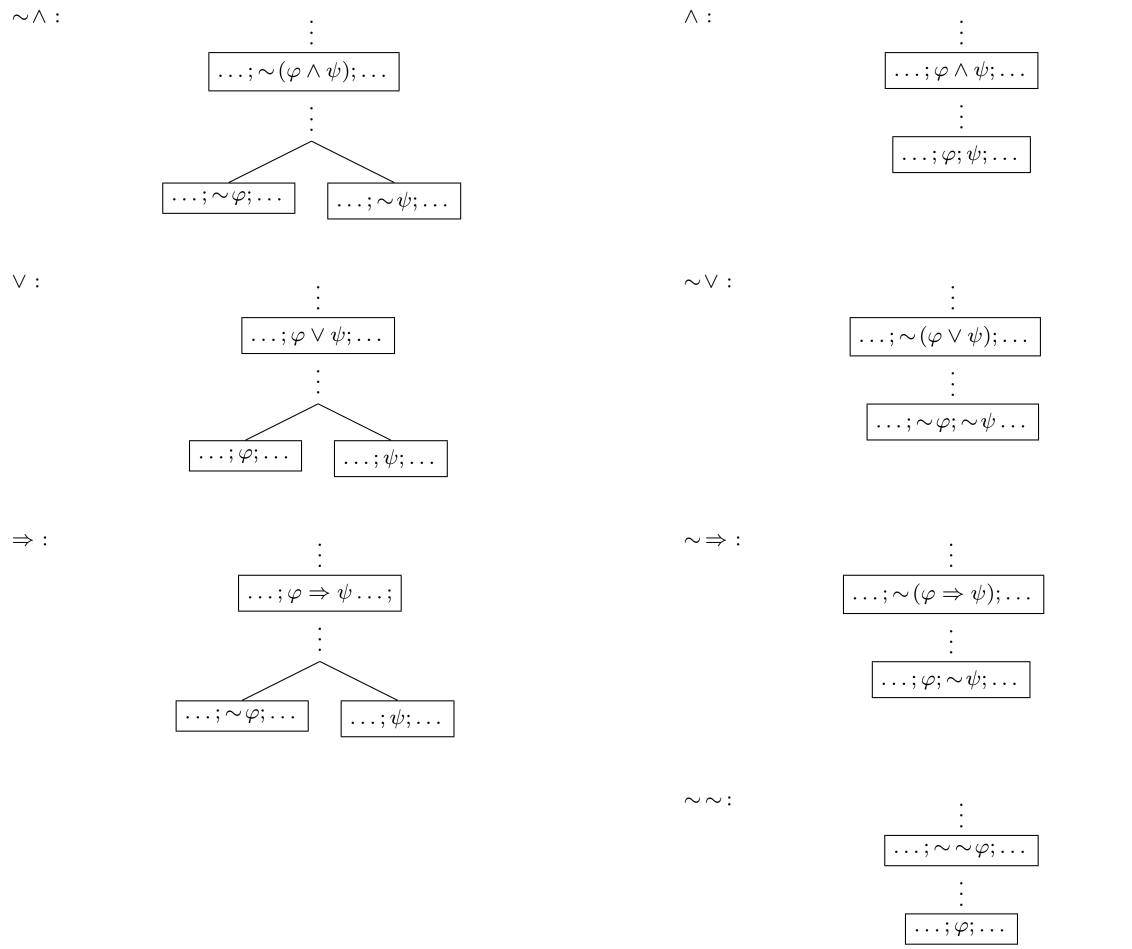
$$(p \wedge q) \Rightarrow r \rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

$$\rightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$$

Conclusion

On voit ainsi que l'on a, pour toute formule φ : φ est démontrable dans le calcul des séquents ssi φ est démontrable par la méthode des arbres. D'où il suit que le calcul des séquents est tout aussi correct (consistant) et complet que la méthode des arbres.

A Table des règles pour un arbre "à vignettes".



Remarque importante : les trois petits points à gauche et à droite des formules à traiter viennent à la place de formules figurant éventuellement dans la même vignette. *Ces formules doivent être intégralement ré-écrites dans la, ou les, vignette(s) résultant de l'application de la règle.*

Bien entendu, il peut n'y avoir, dans une vignette, aucune formule à droite, ou à gauche, de la formule à traiter, ou même aucune autre formule que la formule à traiter.

B Démonstration par récurrence

B.1 Préambule - rappels

Rappel (cf. ci-dessus section 1, p.1) : les formules bien formées du langage L pour le calcul des propositions sont définies récursivement par les clauses suivantes :

- a. une lettre de proposition isolée est une formule bien formée (formule élémentaire ou atomique).
- b. si φ est une formule bien formée, $\sim\varphi$ est une formule bien formée.
- c. si φ et ψ sont des formules bien formées, alors :
  - i. $(\varphi \wedge \psi)$ est une formule bien formée
  - ii. $(\varphi \vee \psi)$ est une formule bien formée
  - iii. $(\varphi \Rightarrow \psi)$ est une formule bien formée.
- d. Seules sont bien formées les formules obtenues par application des règles a - c.

Cela signifie que toute formule bien formée est construite à partir de formules élémentaires (lettres de proposition) par application successive des règles b. et c. ci-dessus. Chaque règle consiste à introduire un des quatre connecteurs "$\sim$", "$\wedge$", "$\vee$", "$\Rightarrow$", de telle sorte que le nombre des connecteurs d'une formule correspond exactement au nombre de fois que l'une des quatre règles a été utilisée. Ce nombre mesure, en quelque sorte, la complexité d'une formule, si l'on convient qu'une formule est d'autant plus complexe qu'est plus grand le nombre de fois qu'une règle a été utilisée pour la former. A chaque formule φ est donc associé un nombre, que l'on appelle "degré de la formule φ", et que l'on peut noter '$dg(\varphi)$' ('dg' est une fonction de F dans $\mathbb{N}$; i.e., $dg : F \to \mathbb{N}$). On définit récursivement $dg(\varphi)$ ainsi :

- si φ est une formule élémentaire, $dg(\varphi) = 0$
- si $dg(\varphi) = n$, $dg(\sim\varphi) = n + 1$
- si $dg(\varphi) = n$ et $dg(\psi) = m$, alors :
  - $dg(\varphi \wedge \psi) = dg(\varphi \vee \psi) = dg(\varphi \Rightarrow \psi) = n + m + 1$

Il résulte de ces définitions que toute formule de degré n est formée, de manière unique, à partir d'une ou de deux formules de degré strictement inférieur à n. La dernière règle à avoir été appliquée pour former une formule la caractérise comme étant soit une négation (de la forme $\sim\varphi$), soit une conjonction (de la forme $\varphi \wedge \psi$), soit une disjonction (de la forme $\varphi \vee \psi$), soit, enfin, une implication (de la forme $\varphi \Rightarrow \psi$). Il n'y a pas d'autres types de formule.

B.2 Principes généraux

L'ensemble F des formules bien formées de L est infini (dénombrable) et il n'est pas toujours possible de démontrer directement que toutes les formules de L ont telle ou telle propriété, disons P. Dans ce cas, on peut exploiter le fait que les formules sont construites systématiquement à partir de formules de degré inférieur, pour essayer de montrer que la propriété P en question est transmise par les règles de formation (propriété dite "héréditaire"pour ces règles) ; ce qui signifie que si deux formules quelconques φ et ψ ont la propriété P, alors les formules $\sim\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$, formées en vertu des règles b. et c. ci-dessus, ont également la propriété P.

Supposons alors que l'on ait pu démontrer que :

$\rightarrow$ (A) les formules de degré 0 (formules élémentaires), ont la propriété P,
et que
$\rightarrow$ (B) les règles de formation transmettent la propriété P,
on pourra alors en conclure que toutes les formules de L ont la propriété P, en vertu du petit raisonnement suivant, tout simple : en vertu de (A) les formules de degré 0 ont la propriété P, donc, en vertu de (B), les formules de degré 1 ont également la propriété P, et donc, toujours en vertu de (B) les formules de degré 2 ont la propriété P, et donc, en vertu de (B), etc. Ainsi, de proche en proche, on est assuré que toutes les formules, quel que soit leur degré, ont la propriété P ; autrement dit, toutes les formules de L ont la propriété P.

La difficulté peut venir de ce que l'on entend par propriété d'une formule de L. En général, s'agissant des "choses" du monde, une propriété est quelque chose du genre "…est rouge" ou "…est rond", ou "…aime les fraises à la crème", ou encore "…a les cheveux blonds". Mais on peut former des propriétés plus complexes comme par exemple "…se fâche lorsque ses enfants allument la télévision", ou bien "…préfère dormir plutôt que de travailler son cours de logique", ou encore "…monte à l'échelle en fumant la pipe". En général, lorsqu'une phrase comporte un nom propre d'objet, on peut considérer que l'expression obtenue en mettant trois petits points à la place du nom d'objet, exprime une propriété d'objet. Par exemple, de la phrase de Spinoza (*Ethique*, I, prop. 15) : «Tout ce qui est, est en Dieu, et rien, sans Dieu, ne peut ni être ni être conçu", on peut extraire la propriété : «Tout ce qui est, est en … et rien, sans … ne peut ni être ni être conçu" qui est vraie de Dieu (si la phrase précédente est vraie) mais peut l'être aussi d'autres objets (difficile question métaphysico-théologique !!!).

C'est ainsi également que de la phrase "φ est vraie pour i ssi φ appartient à l'ensemble W", dans laquelle φ joue le rôle de nom propre d'une formule du langage L, i nomme une interprétation et W un ensemble de formules, on peut extraire la propriété : "…est vraie pour i ssi … appartient à W" dont il est maintenant légitime de se demander si elle vaut de toutes les formules de L ou pas (pour les objets qui ne sont pas des formules de L la question ne semble pas très pertinente, même si elle peut également être posée).

On peut schématiser la démarche d'une démonstration par récurrence sur le degré des formules de la manière suivante.

Soit P la propriété dont on cherche à démontrer qu'elle est possédée par toutes les formules de L.

- Première étape : on démontre que toutes les formules de degré 0 (les formules élémentaires) ont la propriété P.

- Deuxième étape : pour démontrer que les règles de formation "transmettent" la propriété P, il suffit de démontrer que si toutes les formules de degré $< n$ (n étant un entier naturel quelconque) ont la propriété P, alors toutes les formules de degré n ont la propriété P.

- Conclusion : toutes les formules ont la propriété P.

L'étape parfois délicate est la deuxième. Il s'agit de démontrer une implication (si…, alors…). Pour ce faire on procède classiquement en supposant vrai l'antécédent de l'implication (ici : "toutes les formules de degré $< n$ ont la propriété P") et en montrant que le conséquent en découle. C'est pourquoi on peut distinguer dans la seconde étape deux moments :

- α. on pose l'hypothèse dite "de récurrence" correspondant à l'antécédent de l'implication précédente (ici : "toutes les formules de degré $< n$ ont la propriété P")
- β. sur la base de cette hypothèse, on démontre le conséquent de la même implication (ici : "toutes les formules de degré n ont la propriété P").

Comme on le voit, on retrouve aussi bien à la première étape que dans les deux moments de la seconde un même noyau : "toutes les formules ... ont la propriété P" : à la place de "..." on trouve dans la première étape "de degré $= 0$", dans l'hypothèse de récurrence : "de degré $< n$" et dans le moment β. de la seconde étape : "de degré n" ; le théorème ainsi démontré permet d'affirmer, sans autre forme de procès : toutes les formules ont la propriété P.

Usage de l'hypothèse de récurrence : lorsque l'on cherche à démontrer que toutes les formules de degré n ont la propriété P, il peut se trouver (sinon la démonstration échouerait !) que l'on puisse, en exploitant ce que l'on sait ou que l'on suppose de ces formules, "descendre" dans l'échelle des degrés des formules, et alors l'hypothèse de récurrence nous autorise à attribuer aux formules de degré $< n$, la propriété P, ce qui peut servir à montrer, en "remontant" dans les degrés, que les formules de degré n la possèdent également.

Aussi bien dans la première étape, que dans le moment b. de la seconde, on voit qu'il faut démontrer quelque chose concernant toutes les formules (de degré 0 ou de degré n). Comment démontrer que quelque chose vaut de toutes les formules ?

1. Lorsque l'on veut démontrer que quelque chose vaut pour tous les ceci ou cela (disons tous les X, ici : toutes les formules), on considère un X (ici une formule) quelconque, n'ayant aucune propriété particulière, c'est à dire autre que celles que possèderait n'importe quel autre X (n'importe quelle autre formule). Ce que l'on établira à propos de cet X quelconque (de cette formule quelconque) vaudra alors pour n'importe quel autre X (n'importe quelle autre formule), et donc vaudra pour tous les X (toutes les formules) [12].
2. Dans le cas d'une démonstration par récurrence sur le degré des formules, on cherche à démontrer que les quatre règles de formation "transmettent" une propriété P. Il faut donc envisager chacune de ces règles. Cela signifie que l'on aura à faire quatre démonstrations : la première, pour toutes les formules obtenues par application de la règle b. (c'est dire pour toutes les formules de la forme $\sim\varphi$), la deuxième, pour toutes les formules obtenues par application de la règle c. i (c'est à dire pour toutes les formules de la forme $\varphi \wedge \psi$), etc.

   Par conséquent, le moment β. de la seconde étape se démultiplie : pour démontrer que
   - toutes les formules de degré n ont la propriété P,

   il faut démontrer que :

12. Il s'agit d'une règle d'inférence classique en logique du premier ordre, que l'on exprime verbalement par : ce qui vaut d'un quelconque, vaut de tous. On peut la noter ainsi ($\varphi[x]$= x figure libre dans φ) :

$$\frac{\vdash \varphi[x]}{\vdash \forall x \varphi[x]}$$

– toutes les formules de degré n et de la forme $\sim\varphi$, ont la propriété P,
– toutes les formules de degré n et de la forme $\varphi \wedge \psi$, ont la propriété P
– toutes les formules de degré n et de la forme $\varphi \vee \psi$, ont la propriété P
– toutes les formules de degré n et de la forme $\varphi \Rightarrow \psi$, ont la propriété P.
La plupart du temps ces quatre démonstrations suivent exactement le même schéma.

B.3 Exemple de démonstration par récurrence sur le degré des formules

On va considérer non pas l'ensemble F des formules tel qu'il est défini ci-dessus, mais un sous-ensemble F_P de F, à savoir l'ensemble des formules obtenues en appliquant seulement les règles a., c.i. et c.ii. (cf. appendice B.1, p. 38) ; n'appartiennent donc à F_P que les formules élémentaires (par la règle a.), les conjonctions (par la règle c.i.) et les disjonctions (par la règle c.ii.). Ce sous-ensemble F_P de F est appelé "ensemble des formules positives de F".

Soit maintenant deux interprétations quelconques i et j, telles que :
(A) si $i(p) = \text{V}$, alors $j(p) = \text{V}$, quel que soit p

On cherche à démontrer :
si $v_i(\varphi) = \text{V}$, alors $v_j(\varphi) = \text{V}$, quelle que soit la formule positive φ.

On cherche donc à démontrer que toutes le formules positives possèdent la propriété que l'on pourrait exprimer (lourdement !) ainsi : "... est satisfaite par l'interprétation j si ... est satisfaite par l'interprétation i".

– Première étape : on démontre que toutes les formules positives de degré 0 (les formules positives élémentaires) ont la propriété '... est satisfaite par l'interprétation j si ... est satisfaite par l'interprétation i', c'est à dire, plus clairement :
si $v_i(\psi) = \text{V}$, alors $v_j(\psi) = \text{V}$, quelle que soit la formule positive ψ de degré 0.

Soit φ une formule positive quelconque de degré 0, c'est à dire de la forme p :
– si $v_i(\varphi) = \text{V}$, alors $v_i(p) = \text{V}$ puisque φ est de la forme p ;
– si $v_i(p) = \text{V}$ alors $i(p) = \text{V}$ par définition de l'évaluation d'une formule élémentaire ;
– si $i(p) = \text{V}$, alors $j(p) = \text{V}$ par la clause (A) ci-dessus ;
– si $j(p) = \text{V}$, alors $v_j(p) = \text{V}$ par définition de l'évaluation d'une formule élémentaire ;
– si $v_j(p) = \text{V}$, alors $v_j(\varphi) = \text{V}$ puisque φ est de la forme p.
Donc, par transitivité de l'implication : si $v_i(\varphi) = \text{V}$, alors $v_j(\varphi) = \text{V}$.

Comme φ est une formule positive quelconque de degré 0, on peut généraliser et conclure :

– si $v_i(\psi) = \text{V}$, alors $v_j(\psi) = \text{V}$, quelle que soit la formule ψ de degré 0.

– Deuxième étape :

– α. Hypothèse de récurrence : toutes les formules positives de degré $< n$ ont la propriété "... est satisfaite par l'interprétation j si ... est satisfaite par l'interprétation i", c'est à dire, plus clairement :

si $v_i(\psi) = \mathrm{V}$, alors $v_j(\psi) = \mathrm{V}$, quelle que soit la formule positive ψ de degré $< n$.

- β. On démontre que toutes les formules positives de degré n ont la propriété "... est satisfaite par l'interprétation j si ... est satisfaite par l'interprétation i", c'est à dire, plus clairement :

  si $v_i(\psi) = \mathrm{V}$, alors $v_j(\psi) = \mathrm{V}$, quelle que soit la formule positive ψ de degré n.

  - β.1. Soit φ une formule positive quelconque, de degré n et de la forme $\theta \wedge \lambda$:

    - si $v_i(\varphi) = \mathrm{V}$ alors $v_i(\theta \wedge \lambda) = \mathrm{V}$, puisque φ est de la forme $\theta \wedge \lambda$;
    - si $v_i(\theta \wedge \lambda) = \mathrm{V}$, alors $v_i(\theta) = \mathrm{V}$ et $v_i(\lambda) = \mathrm{V}$, par définition de l'évaluation d'une conjonction ;
    - si $v_i(\theta) = \mathrm{V}$ et $v_i(\lambda) = \mathrm{V}$, alors $v_j(\theta) = \mathrm{V}$ et $v_j(\lambda) = \mathrm{V}$, par l'hypothèse de récurrence qui peut s'appliquer puisque θ et λ sont nécessairement de degré inférieur à n [13] ;
    - si $v_j(\theta) = \mathrm{V}$ et $v_j(\lambda) = \mathrm{V}$, alors $v_j(\theta \wedge \lambda) = \mathrm{V}$, par définition de l'évaluation d'une conjonction ;
    - si $v_j(\theta \wedge \lambda) = \mathrm{V}$, alors $v_j(\varphi) = \mathrm{V}$; puisque φ est de la forme $\theta \wedge \lambda$.

      Donc par transitivité de l'implication, si $v_i(\varphi) = \mathrm{V}$, alors $v_j(\varphi) = \mathrm{V}$.

      Comme φ est une formule positive quelconque de degré n et de la forme $\theta \wedge \lambda$, on peut généraliser et conclure :

    - si $v_i(\psi) = \mathrm{V}$, alors $v_j(\psi) = \mathrm{V}$, quelle que soit la formule ψ de degré n et de la forme $\theta \wedge \lambda$.

  - β. 2. Soit une formule positive quelconque, de degré n et de la forme $\theta \vee \lambda$:
    Il suffit de substituer '$\vee$' à '$\wedge$' et 'ou' à 'et' dans la démonstration précédente.

- Conclusion :
  si $v_i(\psi) = \mathrm{V}$, alors $v_j(\psi) = \mathrm{V}$, quelle que soit la formule positive ψ.

Pourquoi une telle démonstration est-elle couronnée de succès ? tout simplement parce qu'elle concernait la valeur de vérité d'une formule pour des évaluations (v_i et v_j) ; or la définition d'une évaluation (booléenne) est elle même récursive ; c'est à dire qu'elle définit la valeur de vérité d'une formule "en fonction" de la valeur de vérité de ses sous-formules immédiates. Partant de $v_i(\varphi) = \mathrm{V}$, on peut donc en tirer des conclusions sur la valeur de vérité des sous-formules immédiates de φ et à ce moment appliquer l'hypothèse de récurrence, puisque ces sous-formules sont nécessairement d'un degré moindre que celui de φ. Puis on "remonte" au degré n, toujours grâce aux règles d'évaluation.

13. Faisons "$v_i(\theta) = \mathrm{V}$" $= p$ et "$v_i(\lambda) = \mathrm{V}$" $= q$, "$v_j(\theta) = \mathrm{V}$" $= r$ et "$v_j(\lambda) = \mathrm{V}$" $= s$. L'hypothèse de récurrence autorise à poser $p \Rightarrow r$ et $q \Rightarrow s$ et on vient de montrer : $p \wedge q$; on peut donc en tirer : $r \wedge s$, en vertu de tautologie : $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s)]$. La même chose vaudrait si à la place des conjonctions dans le conséquent on avait des disjonctions, tout comme si, à la place des implications dans l'antécédent et le conséquent (mais pas à la place de l'implication principale !), on avait des bi-implications.

- Remarque concernant la démonstration particulière prise pour exemple : emporté par l'enthousiasme du succès, on pourrait se dire que ce micro-théorème pourrait valoir également pour des formules de la forme $\sim\varphi$, ou de la forme $\varphi \Rightarrow \psi$. On va voir que ce n'est pas le cas.

Soit θ une formule de degré n quelconque et de la forme $\sim\varphi$:
- si $v_i(\theta) = \text{V}$, alors $v_i(\sim\varphi) = \text{V}$, puisque θ est de la forme $\sim\varphi$;
- si $v_i(\sim\varphi) = \text{V}$, alors $v_i(\varphi) = \text{F}$, par définition de l'évaluation d'une négation ;
- si $v_i(\varphi) = \text{F}$, alors .... rien ! car l'hypothèse de récurrence n'a rien prévu dans ce cas : on sait ce qu'il en est de $v_j(\varphi)$, si $v_i(\varphi) = \text{V}$ (à savoir que $v_j(\varphi) = \text{V}$), mais pas si $v_i(\varphi) = \text{F}$.

On s'engagerait dans la même impasse si l'on essayait de démontrer la même chose pour une formule de la forme $\varphi \Rightarrow \psi$:
Soit θ une formule de degré n quelconque et de la forme $\varphi \Rightarrow \psi$:
- si $v_i(\theta) = \text{V}$, alors $v_i(\varphi \Rightarrow \psi) = \text{V}$, puisque θ est de la forme $\varphi \Rightarrow \psi$;
- si $v_i(\varphi \Rightarrow \psi) = \text{V}$, alors $v_i(\varphi) = \text{F}$ ou $v_i(\psi) = \text{V}$, par définition de l'évaluation d'une implication ;
- si $v_i(\varphi) = \text{F}$ ou $v_i(\psi) = \text{V}$, alors.........rien ! car l'hypothèse de récurrence n'a rien prévu pour $v_i(\varphi) = \text{F}$ et rien n'autorise à admettre que la disjonction est vraie parce que son second membre l'est.

Il n'en irait évidemment pas de même si au lieu de (A) ci-dessus (i.e. si $i_(p) = \text{V}$, alors $j(p) = \text{V}$, pour toute formule élémentaire p), on avait posé (A') : $i(p) = \text{V}$ *ssi* $j(p) = \text{V}$ pour toute formule élémentaire p, qui est équivalent à : $i(p) = \text{F}$ ssi $j(p) = \text{F}$, pour toute formule élémentaire p. On pourrait alors démontrer : $v_i(\varphi) = \text{V}$ ssi $v_j(\varphi) = \text{V}$, pour toute formule φ de L ; autrement dit, on pourrait démontrer que, étant donné une interprétation i, l'évaluation correspondante v_i en est une extension unique.

A titre d'exercice (d'écriture !) : on peut s'amuser à définir (sémantiquement) la notion duale de celle d'ensemble de vérité, à savoir celle d' "ensemble de fausseté", de la manière suivante ; M est un ensemble de fausseté ssi il existe une interprétation i telle que, pour tout φ, $\varphi \in M$ ssi $v_i(\varphi) = \text{F}$.

1. Donner la définition syntaxique d'un ensemble de fausseté
2. Montrer, par récurrence sur le degré des formules, que les deux définitions, sémantique et syntaxique, sont équivalentes

B.4 Exemple de récurrence en arithmétique élémentaire.

On note S_{n^2}, la somme des n premiers nombres entiers carrés d'entier, i.e. $S_{n^2} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$. Il s'agit de montrer que, quel soit n,

$$S_{n^2} = \frac{2.n^3 + 3.n^2 + n}{6}$$

On peut évidement tenter d'abord de vérifier "à la main" que cette formule "marche" pour des petits nombres ; ainsi par exemple on peut vérifier que

$$S_{4^2} = \frac{2.4^3 + 3.4^2 + 4}{6} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$

. On a en effet :

$$\frac{2.4^3+3.4^2+4}{6}=\frac{128+48+4}{6}=\frac{180}{6}=30=1+4+9+16$$

Le même genre de petit calcul pourrait être fait sans difficulté avec d'autres nombre, 5, 6,... Il clair cependant que cela ne pourrait apporter qu'une certitude "morale", comme dirait Leibniz, qui est ici insuffisante. Il faut donc démontrer par récurrence que cette formule vaut pour tous les entiers.

1. On montre d'abord que cela vaut pour $n=1$, i.e. que $S_{1^2}=1^2$. Et en effet, puisque $2.1^3=2.1=2$, et que $3.1^2=3.1=3$ on a :

$$S_{1^2}=\frac{2+3+1}{6}=\frac{6}{6}=1=1^2$$

.

2. Hypothèse de récurrence, n étant quelconque mais donné :

$$S_{n^2}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

3. A démontrer pour $n+1$. Pour cela, on montre que le résultat de l'application de la formule directement à $n+1$ est égal à la somme de S_{n^2} et de $(n+1)^2$, autrement dit on montre que :

$$S_{(n+1)^2}=S_{n^2}+(n+1)^2$$

On calcule[14] d'abord $S_{(n+1)^2}$:

$$S_{(n+1)^2}=\frac{2.(n+1)^3+3.(n+1)^2+n+1}{6}=\frac{2.n^3+6.n^2+6.n+2+3.n^2+6.n+3+n+1}{6}=$$

$$\boxed{\frac{2.n^3+9.n^2+13.n+6}{6}}$$

.

Puis on calcule $S_{n^2}+(n+1)^2$:

$$S_{n^2}+(n+1)^2=\frac{2.n^3+3.n^2+n}{6}+n^2+2.n+1=\frac{2.n^3+3.n^2+n+6.n^2+12.n+6}{6}=$$

$$\boxed{\frac{2.n^3+9.n^2+13.n+6}{6}}$$

CQFD.

14. Rappel : $(n+1)^3=n^3+3.n^2+3.n+1$ et $(n+1)^2=n^2+2.n+1$

C Lemme d'interpolation

On se souvient que dans les "Rudiments" on avait démontré le petit lemme suivant :
si une implication est tautologique, et que ses deux membres sont des formules neutres, alors il y a au moins une lettre de proposition commune à l'antécédent et au conséquent de l'implication.

Le Lemme d'interpolation se situe dans le prolongement de ce petit lemme. Il s'énonce ainsi :

soit $p_1, \ldots, p_n$, n lettres de proposition distinctes deux à deux et φ et ψ deux formules ayant en commun $p_1, \ldots, p_n$. On a alors : $\varphi \Rightarrow \psi$ est tautologique (i.e. $\vDash \varphi \Rightarrow \psi$) ssi il existe au moins une formule θ (dite *interpolante*) dans laquelle ne figurent que les lettres de proposition $p_1, \ldots, p_n$ et telle que $\varphi \Rightarrow \theta$ et $\theta \Rightarrow \psi$ sont toutes deux tautologiques (i.e. $\vDash \varphi \Rightarrow \theta$ et $\vDash \theta \Rightarrow \psi$).

Démonstration :

1. Dans le sens $\leftarrow$, c'est trivial : si l'on a $\vDash \varphi \Rightarrow \theta$ et $\vDash \theta \Rightarrow \psi$, alors par transitivité (Syll.), on a $\vDash \varphi \Rightarrow \psi$. Cela vaut quel que soit θ et donc en particulier pour une formule θ qui ne comprendrait que les lettres de proposition $p_1, \ldots, p_n$.

2. Dans le sens $\rightarrow$ les choses sont plus délicates.
   On suppose $\vDash \varphi \Rightarrow \psi$, et on raisonne par récurrence sur le nombre de lettres de proposition qui figurent dans φ mais pas dans ψ.

   - Soit 0 le nombre de lettres de proposition figurant dans φ mais pas dans ψ. Il suffit de faire $\theta = \varphi$ et l'on a évidemment $\vDash \varphi \Rightarrow \theta$ (i.e. $\vDash \varphi \Rightarrow \varphi$!) et $\theta \Rightarrow \psi$ (i.e. $\vDash \varphi \Rightarrow \psi$, vrai par hypothèse).

   - Hypothèse de récurrence : si la formule φ comporte $m - 1$ lettres de proposition ne figurant pas dans ψ, alors il existe une formule θ, ne comportant que les lettres de proposition $p_1, \ldots, p_n$ et telles que $\vDash \varphi \Rightarrow \theta$ et $\vDash \theta \Rightarrow \psi$.

   - A démontrer pour m.

     Soit φ_1 la formule obtenue en substituant la lettre de proposition p_1 à l'une des lettres de proposition, disons q, figurant dans φ mais pas dans ψ ; et φ_2 la formule obtenue en substituant $\sim p_1$ à q.

     Puisque l'on a par hypothèse $\vDash \varphi \Rightarrow \psi$ et que q ne figure pas dans ψ, on a, en vertu du théorème de substitution : $\vDash \varphi_1 \Rightarrow \psi$ et $\vDash \varphi_2 \Rightarrow \psi$.
     Donc : $\vDash (\varphi_1 \Rightarrow \psi) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \psi)$, ce qui, en vertu du schéma de tautologie $\vDash [(\kappa \Rightarrow \mu) \wedge (\lambda \Rightarrow \mu)] \Rightarrow [(\kappa \vee \lambda) \Rightarrow \mu]$, donne : $\vDash (\varphi_1 \vee \varphi_2) \Rightarrow \psi$.

     Comme $\varphi_1 \vee \varphi_2$ ne comporte que $m - 1$ lettres de proposition ne figurant pas dans ψ, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe donc une formule θ ne comportant que les lettres de proposition $p_1, \ldots, p_n$ et telle que $\vDash (\varphi_1 \vee \varphi_2) \Rightarrow \theta$ et $\vDash \theta \Rightarrow \psi$.

θ est l'interpolante recherchée.

Il suffit en effet de montrer $\vDash \varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, ce qui, par transitivité, donnera $\vDash \varphi \Rightarrow \theta$ et achèvera la démonstration.
Soit i une interprétation qui rend vraie φ. Alors de deux choses l'une :

- soit $i(p_1) = i(q)$ et alors $v_i(\varphi_1) = v_i(\varphi) = \mathrm{V}$;
- soit $i(p_1) \neq i(q)$ et alors $v_i(\sim p_1) = i(q)$; d'où, comme précédemment : $v_i(\varphi_2) = v_i(\varphi) = \mathrm{V}$.

Donc toute interprétation qui rend vraie φ, rend vrai l'un ou l'autre des membres de la disjonction et donc rend vraie la disjonction elle-même : $\varphi_1 \vee \varphi_2$; d'où :

$$\vDash \varphi \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2).$$

CQFD.

Table des matières