Notes sur le cours L1, 2014-2015, suivies d'une bibliographie. (1er semestre)

Arithmétique et géométrie chez les grecs de Pythagore à Euclide.

Remarque : les volumes 1 et 2 des *Eléments d'Euclide*, édité par bernard Vitrac aux PUF est inestimable pour une bonne compréhension des thèmes abordés ici.

Vol. 1 pour la géométrie, vol.2 pour l'arithmétique.

L'introduction générale de M Caveing est un outil remarquable.

Le quadrivium

Archytas (vers 360 av. J.-C.) témoigne de l'existence de cette idée dans l'enseignement de Pythagore.

> Fragment 1 d'Archytas : « Les mathématiciens, à mon avis, savent bien discerner et comprendre comme il faut - et cela n'est nullement surprenant la nature de chaque chose (...). Aussi, touchant la vitesse des astres, de leur lever et de leur coucher, nous ont-ils donné une connaissance claire, tout autant qu'en géométrie plane, en arithmétique et en sphérique, sans oublier non plus la musique. Car ces sciences semblent sœurs, puisqu'elles s'occupent des deux premières formes de l'être, qui sont elles-mêmes sœurs[1] »

Cette notion est présente chez Platon, *La République*, VII, 530 de et *La République*, VII, 522b-531c. dans ce dernier passage, Il distingue quatre sciences : science des nombres, géométrie plane, géométrie des solides, harmonique.

Le terme lui-même apparaît au Ve siècle latin. D'abord chez Martianus Capella (de Numidie) qui, à côté du *Trivium* (grammaire, dialectique, rhétorique), décrit le *Quadrivium* où l'on trouve l'arithmétique, la géométrie, la musique (ou harmonie) et l'astronomie (ou spérique) ; 'idée est développée par Boèce (Anicius Manlius Severinus Boethius, 470-524, *La consolation de la philosophie*, le *premier des scolastiques*, anti arianiste), qui –dans l' *Institution arithmétique*- en parle comme *les quatre voies (ou sciences)* (τέσσαρες μέθοδοι).

Il est utilisé par Bède le vénérable au VIIIe siècle, à côté du trivium (grammaire, rhétorique, dialectique), par Gerber d'Aurillac (Sylvestre II) et dans tout le moyen-âge, à Byzance, comme chez les arabes et chez les latins.

Il est juste d'y reconnaître un classement de fait qui régnait dans l'antiquité grecque.

Le « quadrivium » pythagoricien :

Groupe de quatre arts libéraux à caractère mathématique.

> Des êtres au sens propre et de ceux qui le sont par homonymie, c'est à dire des intelligibles et des sensibles, les uns sont unifiés et à l'état de cohésion, comme le vivant, le monde, l'arbre et tout ce qui leur ressemble, lesquels, au sens propre, s'appellent grandeurs (*mégétê*), les autres sont divisés et à l'état de juxtaposition et comme en tas, lesquels s'appellent multiplicités (*plêtê*), comme un troupeau, un peuple, un tas, un chœur et toutes choses semblables. On doit penser que la sagesse est la science de ces deux formes. Mais puisque toute multiplicité et toute grandeur sont nécessairement infinies par leur nature (car la multiplicité ne cesse de progresser à partir d'une racine définie, et la grandeur, divisée à partir d'une totalité définie, ne peut cesser nulle part le sectionnement et de ce fait, l'étend à l'infini, et que ces sciences sont entièrement sciences d'objets limités et jamais d'objets infinis, il

[1] Porphyre, Commentaire sur les Harmoniques de Claude Ptolémée

apparaît bien qu'une science ne saurait se constituer ni au sujet de la grandeur, ni au sujet de la multiplicité, prise absolument, mais bien au sujet d'un objet déterminé à partie de l'une et de l'autre, au sujet du *poson* à partir de la multiplicité, au sujet du *pêlikon* à partir de la grandeur. Pour reprendre depuis le début, puisque le *poson* est, soit vu en lui-même et sans aucune relation avec un autre, par exemple le pair, impair, parfait et les déterminations semblables, soit relatif à un autre qui existe déjà et conçu en relation avec lui, par exemple double de, plus grand que, plus petit que, moitié de…, et les déterminations semblables, il est évident que deux méthodes scientifiques se saisiront de tout ce qui concerne le *poson* pour en faire l'examen : l'arithmétique pour le *poson* pris en lui-même, la musique pour le *poson* en relation. Puisque, de son côté, le *pêlikon* est soit au repos et en stabilité, soit en mouvement et en révolution, deux sciences correspondantes le connaîtront exactement : la géométrie pour *pêlikon* stable et au repos, la sphérique pour le *pêlikon* en mouvement et en révolution »

Nicomaque de Gérase,(Pythagoricien tardif, fin 1ers.),*Introd. Arithmétique*, trad. J.Bertier,Vrin, 1978.

Tableau dû à Vitrac, *Eléments*, vol.2, p.20-26:

Quantité	Discrète	Continue
Indéterminée	plêtos	Mégétos
Déterminée	poson	Pêlikon
Sciences correspondantes	**Arithmétique** pour *poson* en-soi **Musique** pour *poson* en relation	**Géométrie** pour *pêlikon* non-mû **Sphérique** pour *pêlikon* mû
principes	Unité (monade)	Unité (de mesure)

Ici, la distinction essentielle est discret/continu : *poson*, qui est un adjectif interrogatif signifiant « combien » alors que *pêlikon* sigifie « combien grand ». On remarque que les distinctions des domaines –tels que Nicomaque les présente- ne se font pas d'abord selon le critère de l'intelligible et du sensible, de l'abstrait à l'appliqué etc. Ces critères seront présents –quoique combinés avec les critères donnés ci-dessus- chez Platon, Aristote surtout, Géminus (premier siècle), Pappus (fin du troisième), Proclus (cinquième) etc.

Arithmétique et géométrie du côté de l'intelligible, musique et astronomie du côté du « sensible ».

Jean Philopon, commentateur grec du sixième défend une distinction en trois termes, en jouant sur les oppositions sensibles-intelligibles, mu-non-mu, matériel-immatériel. « en poussant » un peu, on obtiendrait chez Philopon :

(*Testimonia*, Ed. et Trad. Germaine Aujac, Paris, Belles-lettres, 1979, p.153.

Mathématiques pures	Mathématiques mixtes	Physique
Pas de matière	Pas de matière	Matière
Pas de mouvement	Mouvement	Mouvement

C'est assez aristotélicien.

Le *Quadrivium* nous donne notre plan.

L'Arithmétique

La géométrie

Le système du monde

L'Harmonie

L'Arithmétique

Dans l'histoire, il y aura une controverse fréquente et jamais close quant à la suprématie de l'arithmétique sur la géométrie ou l'inverse. (Pythagoriciens, Platon, Descartes, Wallis, Dedekind …)
Elle recouvre Continu-Discret, atomes et divisibilité infinie.

Une philosophie dualiste, le pythagorisme :

La décade des opposés (selon Aristote, *Méta*, A, 5, 986a22) :

Limité Illimité

C'est là l'opposition fondamentale qui sera le socle de la tension platonicienne entre l'intellect et le sensible.
Impair Pair
Un Beaucoup
Droite Gauche
Mâle Femelle
Immobile Mobile
Rectiligne Courbe
Lumineux Sombre
Bien Mal
Carré Rectangulaire

Les pythagoriciens et les nombres.

Tout nombre est un individu bien déterminé (une *ousia*) et pour eux, seuls ce que nous appelons les entiers positifs, à partir de 2 sont des nombres.

Aristote, au premier livre de sa *Métaphysique* :

> "A l'époque de Leucippe et de Démocrite, et même déjà avant eux, ceux qu'on appelle les pythagoriciens s'intéressèrent les premiers aux mathématiques et les firent progresser. Comme ils avaient été élevés dans cette science, ils crurent que ses principes étaient les principes de toutes choses ; et, puisque par nature les nombres sont les premiers des principes mathématiques, c'est dans les nombres qu'ils pensaient voir de nombreuses similitudes avec les êtres éternels ainsi qu'avec les créatures, soumises au devenir, bien plus encore que dans le feu, la terre et l'eau " (A, 5, 985 b).

Les nombres, dont le principe est l'unité se distinguent d'abord en deux classes fondamentales : les pairs (artios) et les impairs (perissos) et l'unité, monade sans parties a comme représentant immédiat le point.

La *tetractys* (nombre 10), toute puissante, somme des quatre premiers nombres (avec le 1)

Nombre parfait : « égal à la somme de ses facteurs », comme 6 = 1+2+3 ; 28 = 1+2+4+7+14

Paires de nombres amicaux : chaque nombre est la somme des diviseurs propres de l'autre : 220 et 284, 9 363 584 et 9 437 056 (Descartes)

Les nombres premiers.

Le nombre-mesure :

Un nombre est *multiple* d'un autre si, ajoutant *n* fois le petit, on obtient le grand (ex.12 et 3)

Fragment de Philolaos, transmis par Stobée (compilateur grec Ve siècle après J.C.)**:**

> « Et de fait, tout être connaissable a un nombre : sans celui-ci, on ne saurait rien concevoir ni connaître » (in *Les présocratiques*, Pléiade, fragment 4 et 5, p.503)

Stobée attribue à Philolaos (de Crotone, 485-385, survivant de l'incendie de l'école de Crotone en 440) :

> « La nature du nombre est pour tout homme cognitive, directrice et institutrice, sur tout ce qui est matière soit à perplexité, soit à ignorance. En effet, aucune des choses qui existent ne serait évidente pour personne, ni en elle-même, ni dans sa relation avec une autre chose, s'il n'existait pas le nombre et l'essence du nombre. En réalité c'est le nombre qui, en rendant toutes choses adéquates à l'âme par la sensation, les rend connaissables et commensurables entre elles selon la nature du *gnomon*, car c'est lui qui les rend corporelle et distingue chacune des relations entre les choses tant limitantes qu'illimitées. Et on peut observer la nature du nombre et sa puissance efficace non seulement dans les choses démoniques et divines, mais aussi dans toutes les actions et paroles humaines, à tout propos et aussi bien dans toutes les activités de l'art que dans le domaine de la musique. La nature du nombre, d'autre part, pas plus que ne le fait l'harmonie, n'admet la fausseté : avec la fausseté en effet ni l'une ni l'autre n'a de parenté, puisque la fausseté et la jalousie ressortissent, elles à la nature de ce qui est illimité, inintelligible et irrationnel. Le souffle de la fausseté n'atteint aucunement le nombre ; car la fausseté combat et hait sa nature, tandis que sa vérité est chose propre et connaturelle au nombre ». (in Pléiade, p.506)

Excellente argumentation d'Aristote contre la numérologie pythagoricienne : Métaphysique, N, VI,1092 b 26 *sq.*, in Pléiade p.575-577.

Les nombres figurés

Il semble que l'arithmétique inspire la théorie géométrique en ce sens que les nombres sont dotés de forme; une grande place est faite aux nombres figurés: nombres carrés, rectangles (semblables ou non), triangulaires (semblables ou non). Mais elle étend les relations de proportionnalité au delà des proportions arithmétiques. Ainsi, si l'on considère un carré et celui qui est construit sur sa diagonale, alors leur côtés auront rapport entre eux (une proportion sera conçue) sans qu'elle puisse être exprimée en proportion arithmétique. Avec Platon, on assiste ainsi à une extension de la proportion, c'est la métrétique théorique extension très importante puisqu'elle propose une science des grandeurs commensurables ou non.

Ainsi a-t-on un ordre des êtres mathématiques fondamentaux: unité, nombre, grandeur géométrique et les sciences correspondantes: arithmétique, logistique théorique et métrétique théorique.

Exemples :

Nombres triangulaires (3,6, 10, 15 …)

Les nombres carrés (4, 9, 16 …)

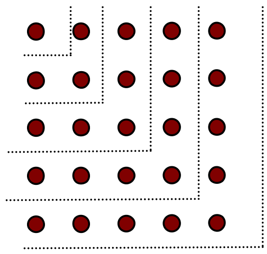
Les nombres pentagonaux (5, 12, 22 …)

Les nombres hexagonaux (6, 15, 28 …)

Les nombres pyramidaux (plusieurs sortes selon la base)

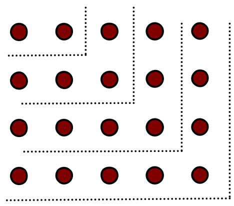
La figuration permet d'obtenir des résultats par itération (induction). Ex. :

La somme des n premiers nombres impairs s'obtient grâce au *gnomon* (équerre) : et on trouve que



(fig. 1) $1 + 3 + 5 + 7 + (2n-1) = n^2$ $\Sigma_{(1,n)} (2p-1) = n^2$

de même les pairs se construisent par des rectangles et on trouve que :



(fig. 2) $2+4+6+ \ + 2n = n(n+1)$ $\Sigma_{(1,n)} (2p) = n(n+1)$

On en déduit facilement, en divisant la précédente par 2, la somme des entiers (pairs ou impairs).

$\Sigma_{(1,n)} p = ½ n(n+1)$

Les opérations : on peut les additionner, sans doute les multiplier (question de la dimension).

La théorie des nombres chez Platon

Théorie complexe. Quelques éléments.

Une philosophie mathématique

> « Le platonisme sous la forme où nous l'avons considéré est une philosophie mathématique en un double sens du mot. D'une part, l'arithmétique et la géométrie fournissent à Platon le modèle de découverte féconde et d'exacte démonstration auquel le penseur doit se référer pour établir une doctrine de la connaissance vraie. Dans la direction de la conduite individuelle et dans l'organisation de la vie collective le moraliste et le politique suivront de prés les procédés qui permettent la proportionnalité numérique et le dosage quantitatif ». Brunschvicg, *Les étapes de la philosophie mathématique*, p. 69)

(on retrouvera ce projet dans la philosophie cartésienne, avec la mathématiques comme fondements des méthodes et des déductions justes, valables dans tous les autres domaines de connaissance, voire en morale).

> « L'admiration de Platon pour les mathématiques, a écrit fort justement G. Milhaud, qui déborde de ses œuvres et qui se dégage de tout ce que la tradition nous a dit de lui, n'a donc rien d'extérieur ni de superficiel. Il les a connues, cultivées avec passion [...]il en a subi le

> charme puissant ». (R.Baccou, n.492). Eudoxe de Cnide, Menechnme, Dinostrate ont été formés à l'Académie.

Quel que soit le jugement que l'on porte sur les points d'épistémologie, ce qui est certain est que

> « l'intérêt que Platon portait aux mathématiques ne s'est jamais démenti ; dans tous ses ouvrages, il parle de ces sciences avec un secret enthousiasme, car, autant que pour l'évidence et la certitude de leurs raisons, il les aimait pour leur beauté, qui préfigure celle des essences éternelles et de leur principe, l'Idée du Bien » (Baccou, p.446).

On a vu que les pythagoriciens avaient travaillé les séries (arithmétiques, géométriques).

Série arithmétique : r ; 2r ; 3r ; 4r ; … n.r

Série géométrique : x ; x^2 ; x^3 ; x^4 ; … x^n

Certains auteurs voient chez Platon une méditation plutôt extraordinaire sur le lien pouvant exister entre ces deux genres de séries. En effet, dans *Timée* (35b-36c), on voit la structure mathématique de l'âme du Monde. Il pourrait y avoir des considérations pré-logarithmiques ; en tout cas une puissance considération de l'ordre des puissances. Seul exemple : le partage du « cercle de l'autre » en sept morceaux se fait selon 1,2,3,4,9,8,27 qui se comprennent comme 2^0, 2^1,2^2,2^3, alternée avec 3^0,3^1,3^2,3^3. L'addition des exposants (série arithmétique) correspond à la multiplication des puissances (progression géométrique). La méditation sur cette correspondance est au cœur de la théorie des logarithmes. Voir aussi une interprétation harmonique de ceci in *Annexe 2* de J.L. Narcy, *Timée*.

Chez Platon,

-les maths servent de référence comme savoir exemplaire pour exposer une méditation méthodologique ou épistémologique.

-Les objets mathématiques sont vus comme le type même des entités du monde idéal des Idées; êtres parfaits et purement intelligibles, séparés du monde sensible.

-on peut y chercher un fondement qui garantit la légitimité de leurs principes: on y fera alors voir le rôle de la dialectique comme méta science.

-De ces mathématiques bien fondées, on peut déduire les structures de l'univers physique, qui sont mathématiques.

Aristote :

> « Or que l'Un soit la substance et non le prédicat d'une autre chose de laquelle on dit qu'elle est une, Platon en tombe d'accord avec les pythagoricien ; que les nombres soient les causes de la substance des autres êtres, il l'admet encore pareillement avec eux » (*Méta*. I, 6, 987)

Si l'on a compris en quoi les choses mathématiques ne sont pas sensibles ou empiriques, reste à mieux déterminer en quoi elles différent des Idées de la région supérieure.

L'étude fondamentale sur cette question est celle de Léon Robin, *La théorie platonicienne des idées et des nombres d'après Aristote* (1908).

> « De plus, outre les choses sensibles et les Idées, Platon admet qu'il existe les choses mathématiques qui sont des intermédiaires, différentes d'une part, des objets sensibles, en ce qu'elles sont éternelles et immobiles, et d'autre part, des Idées, en ce qu'elles sont une pluralité d'exemplaires semblables, tandis que l'Idée est en elle-même, une réalité une, individuelle et singulière » (*méta.* I, 6, 987)

Par exemple, il y a de nombreux fois 2, des situations qui « en donne l'idée », mais il n'y a qu'Une idée du 2.

De la discussion, de la dialectique qui questionne les hypothèses inspirées du sensible se dégagent deux principes: l'Un (ou le même, ou l'égal), comme le dit Aristote: Il n'y a pas de génération pour l'Un-principe (Méta, XIII, 8, 1084-a) et d'autre part la Dyade indéterminée (ou principe d'altérité, l'Autre, ou principe du Grand et du Petit). Le seul dépassement de ces deux principes opposés dessine un absolu, un terme ultime au delà de l'être, le Bien.

« Les Idées étant les causes des autres êtres, il estima que leurs éléments sont éléments de toutes choses ; ainsi comme matière, les principes des Idées sont le Grand et le Petit (*mega & micron*) et, comme forme, c'est l'Un, car c'est à partir du Grand et du Petit, et par participation du Grand et du Petit à l'Un, que naissent les nombres idéaux » (*id.*)

D'où vient le Deux se demande Socrate dans le *Phédon* (96e-97-b)? Il ne peut avoir une origine empirique car l'approche empirique produit deux choses, aussi bien par scission d'une chose que par rapprochement de deux choses, processus contraires. L'Idée de deux doit donc être dérivée de principes plus élevés. Ces principes sont l'Un et la Dyade indéterminée, qui d'ailleurs engendrent tous les nombres.

Les références sur ce points sont : *Métaphysique* XIII, 7-1081a ; XIII,8-1083a et b ; XIII, 9-1085b ; XIV, 1-1087b ; XIV,3-1091. Lire sur cette question, Maurice Caveing, *La figure et le nombre*, Septentrion, 1997, p.203-211.

L'arithmétique des Eléments d'Euclide

Plan général des *Eléments*

Les quatre premiers livres, de géométrie plane ne font pas usage de la proportion; il y est question des triangles, des cas de parallélisme, de propriétés de polygones usuels. Le cercle dans le livre III et les polygones inscrits dans le IV.

Le livre V est celui des proportions entre grandeurs.

le livre VI revient sur la géométrie plane à l'aide de l'apport du livre V.

Les livres VII, VIII et IX dits livres arithmétiques, contiennent la théorie des nombres. (remarque sur la notion de nombre).

Le livre X s'occupe des rapports, commensurables ou non entre lignes droites.

Le livre XI concerne ce que l'on appellera la stéréométrie, à savoir les propriétés des solides élémentaires.

Le livre XII étudie la mesure du cercle, de la pyramide, du cône, de la sphère par la méthode dite (Grégoire) d'exhaustion.

Le XIIIe livre donne la construction des cinq solides réguliers ou cinq corps platoniciens.

Ce plan est extrêmement problématique. (Vitrac, *Les génies …*, p.57)

1. l'ouvrage commence par la géométrie, alors que l'arithmétique est généralement considérée comme la première science mathématique, ses objets, dénués de position étant plus simples.
2. L'exposé de géométrie plane est interrompu par un livre d'un autre genre, le cinquième, dont on ne peut pas rendre compte en terme d'objet. Il traite des relations entre objets : le « rapport » et la « proportion ». En outre, ce livre est d'un niveau d'abstraction incroyablement élevé par rapport à ce qui le précède.
3. Un autre livre singulier, et ce, pour deux raisons, est livre X. Il mêle lignes, aires et nombres. En fait, comme le V, il traite de relations : celles d'incommensurabilité. En

outre, la deuxième partie du livre est une classification impressionnante de droites et d'aires dites irrationnelles- environ 90 propositions ! Elle fut vite jugée indigeste, d'autant que, par la suite, rien ne semble la justifier.

4. L'exposé stéréométrique s'achève par une comparaison des cinq solides réguliers qui paraît incomplète.
5. Il y a pire : les *Eléments* contiennent non pas une, mais deux théories des proportions ; la seconde est exposée dans le livre VII. Certains résultats sont démontrés deux fois.

En fait, il y a une distinction fondamentale d'objets : les *megethos* et les *arithmos*. Cependant, il y a un rebondissement au début du livre X : Euclide « démontre » que, si deux grandeurs (*mégéthos*) sont commensurables, leur rapport est celui de deux nombres (*arithmos*).

La géométrie

Les grandeurs continues, non discrètes ne relèvent pas *directement* des nombres. En géométie, on y trouve, la ligne, la surface, le volume et l'angle.

- Discret-Continu. (excursion dans l'histoire récente)

Comment le continu peut-il être généré à partir du discret ? Question difficile : depuis les nombres figurés qui suggèrent des grandeurs continues (carrés, rectangles etc.) à partir de points jusqu'à la théorie des coupures de Dedekind (publiée en1887).

Comment *remplir* de nombres une ligne droite graduée ? On progresse depuis les nombres entiers jusqu'aux nombres réels :

Les nombres entiers n'occupent que « quelques points » de la ligne, même s'ils sont infiniment nombreux.

Les nombres rationnels (nos *fractions*) occupent beaucoup plus de points puisque, entre deux points si rapprochés qu'ils soient, on peut insérer un rationnel (et donc une infinité). On dit que l'ensemble des rationnel est *dense*. Il est remarquable que ces nombres peuvent être numérotés et cet ensemble est donc lui aussi dénombrable ; il relève du discret.

On montre facilement que certains points de la ligne ne correspondent à aucun nombre rationnel (très ancien exemple de la diagonale du carré qui n'a pas de rapport rationnel avec le côté du même carré). Ces points non atteints sont si fréquents que tel est le statut de presque tous les points de la ligne.

(Passons sur les très importants nombres algébriques, c'est un peu compliqué).

Dedekind élabore un concept de coupure dans les nombres rationnels : certaines coupures sont *banales*, elles correspondent aux nombres rationnels ; d'autres ne sont pas banales et ne correspondent à aucun rationnel. Dedekind construit soigneusement des opérations sur les coupures (addition, produit) qui prolongent les opérations habituelles. Ceci lui permet de déclarer que l'on a affaire à un nouvel ensemble de nombres, les réels qui remplissent toute la ligne.

Ces nombres décrivent le continu. On montre (Cantor) que cet ensemble n'est pas numérotable, il n'est pas dénombrale. Son infinité est d'un autre genre que l'infinité du dénombrable. On dit que c'est *la puissance du continu*.

- Les opérations sur les grandeurs continues (retour aux grecs)

Une grandeur (longueur, surface, volume ou angle) est *multiple* d'une autre si, en ajoutant n fois la petite etc.

Une grandeur (longueur, surface, volume ou angle) est *commensurable* à une autre si les deux sont multiples d'une autre grandeur. S'il existe une unité commune.

Pas d'opération interne de multiplication.

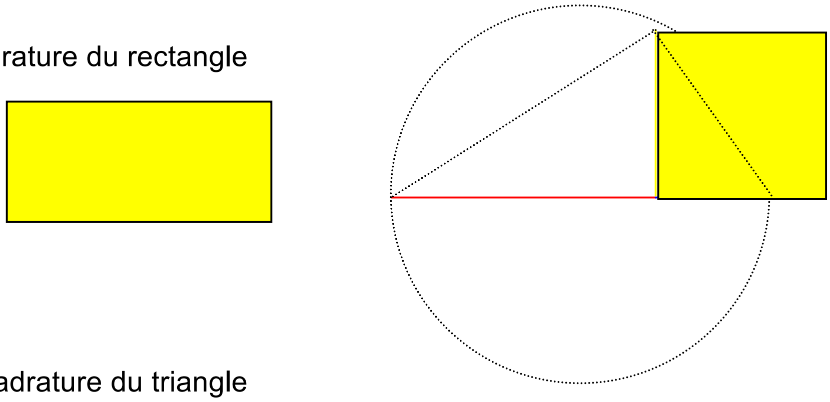
Un problème général : celui de la circulation dans le *quadrivium*.

Doit-on considérer dans la case n°2, seulement la géométrie qui correspond au niveau de la case n°1 ? C'est-à-dire la géométrie qui ne considère pas le mouvement ni la géométrie qui considère les proportions. Cette dernière solution semble convenir à la construction des *Eléments* d'Euclide ; les quatre premiers livres n'ont pas besoin de la case n°3 (théorie des proportions).

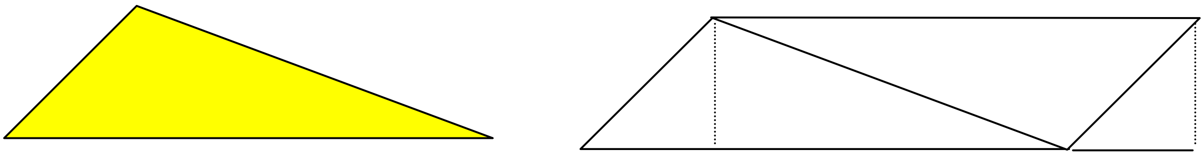
- Les quadratures. Elles sont nécessaires pour disposer d'une opération d'addition sur les surfaces.

Quadrature des polygones quelconques.

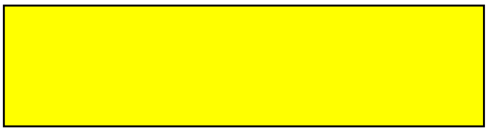
Quadrature du rectangle

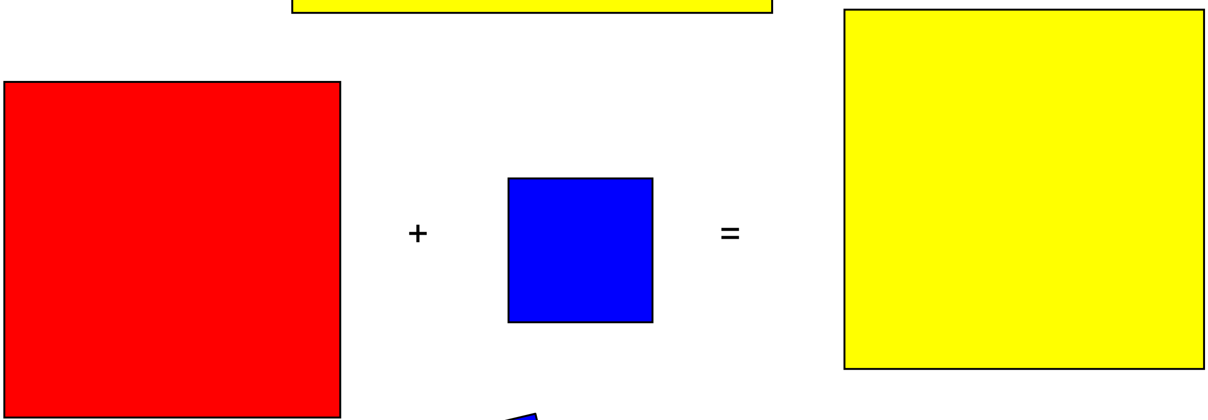


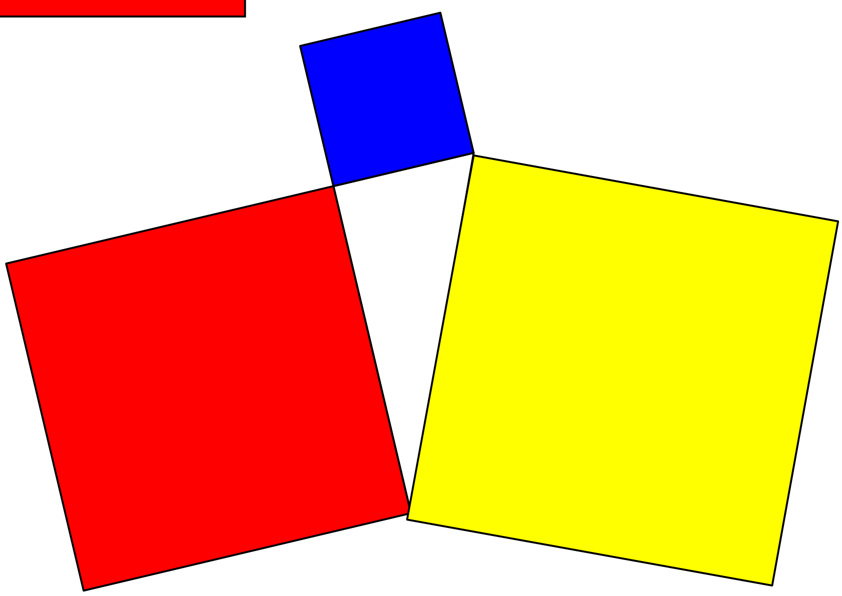
Quadrature du triangle



Addition des carrés







On doit aussi aux pythagoriciens la fameuse relation dite théorème de Pythagore dont ils ont du élaborer une solution arithmétique qui n'est pas connue. On sait le rôle qu'elle aura dans la suite : spéculative ou constructive ?

- Quadrature du cercle

Hippocrate sait quarrer certaine lunules et en « induit » une quadrature du cercle (*cf*.n. 492, p.448-449). Antiphon, contemporain d'Hippocrate de Chios établit sa quadrature sur un polygone inscrit dont il double les côtés de façon itérative. Les polygones étant quarrables, le polygone ultime aussi $_{cqfd}$. Méthode critiquée par Eudème, Simplicius, Archimède, comme contraire à la divisibilité à l'infini des grandeurs.

Ils auraient, selon Jamblique, découvert aussi les cinq solides réguliers (?) Peut-être seulement les trois premiers et Théétète les deux autres (*cf Gardies*). (démonstration à disposition).

Le tétraèdre (feu), l'octaèdre (air), le cube (terre), l'icosaèdre (eau) et le dodécaèdre. Peut-être associés aux éléments ?

- La règle et le compas.

La règle et le compas sont les seuls instruments (intellectuels) admis dans les *Eléments* d'Euclide. D'où vient cette « règle » ? Elle n'est pas vraiment explicitée. Cependant, elle joue un grand rôle.

Elle correspond à la doctrine des « deux mouvements simples, le circulaire et le rectiligne » (voir les demandes chez Euclide)

Elle correspond à l'organisation du cosmos aristotélicien.

Que tirer de ceci ? Ne peut-on penser qu'il n'y a là qu'une exigence de simplicité que l'on peut réclamer pour des *Eléments* ?

C'est difficile : certaines courbes (l'ellipse, la parabole) sont reçues dans la tradition (même si les *Eléments* ne s'en occupent pas) et on peut construire n'importe quel de leurs points à la règle et au compas. C'est surtout une question de degré de complexité.

Certaines courbes (la spirale, la cycloïde…) ne peuvent pas être ainsi tracées (on dit que ce sont des courbes *mécaniques*). Il existe cependant des dispositifs « des compas parfaits » qui tracent des courbes mixtes, ou qui résolvent des problèmes solides (trisection, moyennes proportionnelles).

Ceci fera aussi controverse.

Les grecs traitent aussi de problèmes de géométrie qui échappent aux *Eléments*. Non seulement parce qu'ils ne sont pas traités dans cet ouvrage, mais surtout parce qu'ils ne peuvent pas être résolus par les moyens admis dans les *Eléments*.

Le problème de Délos, la trisection de l'angle.

Le problème de Délos. Deux anecdotes transmises par Eutocius (*cf*. n492, p.452). Le roi Minos ordonne qu'on double un monument que les architectes ont fait trop petit pour sa magnificence . Ou alors, les habitants de Délos, suivant leur oracle durent doubler l'autel d'Apollon ; ils envoyèrent des délégués à Platon pour le résoudre. Ceci se ramène – Hippocrate- à insérer deux moyennes proportionnelles entre le côté du cube et le double de ce côté. En effet :

Soit c le coté du petit cube, je veux x tel que $2c^3=x^3$

Si je parviens à construire y tq : $c/x=x/y=y/2c$, c'est gagné ;

en, effet, on a $cy=x^2$ et $y^2=2cx$ soit $2c^3=x^3$ cqfd. Si c =1, cela devient $1/x=x/y=y/2$

Menechme propose la construction de la parabole $y = x^2$ et l'hyperbole $y = 2/x$; l'intersection donne la solution.

En effet on a $y=x^2$ et $y = 2/x$ d'où on tire : $y=x^2$ et $xy=2$ d'où $y = x^2$ et $x^2y=2x$

soit encore $y = x^2$ et $y^2= 2x$, ce qui vérifie bien en divisant la première par xy et la seconde par $2y$

$1/x=x/y$ et $y/2 = x/y$.

x et y sont les moyennes proportionnelles.

Mais on ne peut pas le faire à la règle et au compas.

Vers 1760, dans son Encyclopédie, d'Alembert écrivait (au terme *proportionnel*) :

> Les Géomètres cherchent depuis deux mille ans une méthode pour trouver géométriquement deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données, c'est-à-dire, en n'employant que la ligne droite et le cercle ; car du reste ce problème est abondamment résolu ; et particulièrement la résolution que l'on en donne par les sections coniques, en faisant, par exemple, qu'un cercle et une parabole s'entrecoupent suivant une certaine loi, est une solution très géométrique de ce problème.
>
> En le réduisant à une équation algébrique, il paroît impossible qu'on le résolve jamais avec le seul secours de la ligne droite et du cercle ; car on arrive toujours à une équation du troisième degré, qu'il n'est pas possible de construire avec la ligne droite et le cercle.
>
> Les anciens résolvoient ce problème méchaniquement par le moyen du mésolabe décrit par *Eutocius* : et plusieurs d'entr'eux ont tâché d'en donner la démonstration : d'autres, comme *Ménechmes*, résolvoient ce problème par les lieux solides : d'autres, par des mouvements composés, comme *Platon*, *Archytas*, *Pappus* et Sporus : d'autres enfin, en tâtonnant, comme *Héron* et *Apollonius*.

Remarque : l'introduction de deux moyennes proportionnelles est importante chez Platon ; elle est requise pour la théorie des quatre éléments dans *Timée* (32b) « Le rapport qui fasse que le feu est à l'air, l'air le soit à l'eau, et que ce que l'air est à l'eau, l'eau le soit à la terre ».

On pourra examiner les solutions attribuées à Platon, à Archytas, à Menechme (n.492, p.453-455)

La multi-section des angles par la quadratrice d'Hippias (d'Elis ; le sophiste de Platon) ou de Dinostrate. Elle est efficace, mais « mécanique ».

- Remarque sur la classification des problèmes. On a le fameux témoignage de Pappus (*Collection mathématique*. Livre IV, IVè siècle de notre ère).

Les géomètres anciens comprennent –sans pouvoir le démontrer- que la complexité des problèmes varie selon les moyens mis en œuvre pour les résoudre. Les problèmes plans sont ceux qui sont résolubles grâce à des droites et à des circonférences de cercle ; solides ceux qui le sont grâce à une ou plusieurs sections coniques. Quant aux problèmes linéaires (ou grammiques), ils font intervenir des lignes variées dans leur solution, lignes dont la construction peut être complexe : spirale, quadratrices, conchoïdes, cissoïdes… Exemple de problème plan : inscrire les polygones réguliers ; de problème solide : la duplication du cube ; de problème linéaires : la trisection de l'angle.

On connait 13 solutions au pb des deux moyennes. Ce qui montre que c'était bien un « pb de géomètres ».

- Le mouvement dans la géométrie

Deux orientations difficilement conciliables :

Selon la première, le mouvement n'est pas admis en géométrie qui est la science de ce qui n'est pas « soumis au devenir » et ne change pas (interprété ici comme, ce qui n'est pas en mouvement). La première proposition du premier livre des *Eléments* d'Euclide va dans ce sens : elle interdir que l'on puisse *transporter* une ligne d'un lieu du plan à un autre. La transport des figures est évité dans la mesure du possible.

Selon la seconde, un certain genre de mouvement est mobilisé dans les *Eléments.* La Notion commune n°7 dit que « Les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles », ce qui semble en appeler au mouvement.

Définition de la sphère : elle résulte de la rotation d'un cercle autour de son diamètre. Il y a bien un mouvement générateur de la figure.

On note que ces mouvements sont indifférents au temps de son accomplissement.

La question de la légitimité du mouvement en géométrie sera une des plus controversées de l'histoire de cette science.

- Note sur la demande n°5 (le 5eme postulat dit *des parallèles*)

« Si une droite tombant sur deux droites fait des angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfinment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits ». (trad. Vitrac)

Cet énoncé est long et complexe, ce qui contraste avec les autres demandes et notions communes. Il est équivalent à a formulation courante suivante : « Pour toute droite D et pour tout point P n'appartenant pas à D, il existe une unique droite D' parallèle à D dans le plan déterminé par D et P. »

Une longue et riche histoire critiquant le statut *non* démontrable de cet énoncé a conduit aux étapes suivantes :

De multiples tentatives pour démontrer directement le postulat. Toutes vaines.

Des recherches de démonstration par l'absurde. Aucune n'aboutissant à une contradiction.

L'admission, puis la démonstration que les propriétés issues de la négation du postulat sont aussi bien démontrées que celles obtenue en l'admettant.

Conclusion inévitable, il y a diverses géométries, l'euclidienne (qui admet le postulat) et les non euclidiennes qui le refusent. Elles sont toutes aussi bien fondées.

Une vaste crise s'ensuivit : la géométrie ne serait pas nécessairement adéquate au monde de notre expérience sensible.

PHILOSOPHIE. L1 .

Eléments de bibliographie sur les sciences du quadrivium dans ‘antiquité grecque.

Barbin E. et Caveing M. (éd.) *Les philosophes et les mathématiques*, Paris, Ellipses, 1996

Brunschvicg L. *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris, 1912, réed. Blanchard, 1972.

Caveing M. *Introduction générale* aux Eléments d’Euclide, ed. Vitrac, Paris, PUF, 1990.

Chouchan Nathalie, Textes choisis et présentés par… Corpus, Flammarion, 1999.

Dahan-Dalmédico A.& Peiffer J. *Routes et dédales: une histoire des mathématiques*, Paris, Seuil, 1986

Davis P.J. et Hersh R. *L’univers mathématique* (1982) , Gauthier-Villars, 1985 (trad. française)

Desanti J.T. « Une crise de développement exemplaire, la découverte des irrationnels », in *Logique et connaissance scientifique,* Pléiade, 1976.

Dhombres J. *Nombres, mesure et continu*, Paris, Nathan, 1978.

Euclide, *Eléments de géométrie en treize livres*, Traduction Vitrac, 4 vol. Paris, PUF, 1990 …

The thirteen books of Euclid’s Elements, Dover, Thomas Heath, 3 vol.

Gardies J.L. *L’héritage épistémologique d’Eudoxe de Cnide*, Paris, Vrin, 1988.

Pascal entre Eudoxe et Cantor, Paris, Vrin, 1984.

Granger Gilles G., *La théorie aristotélicienne de la science*, Paris, 1976.

Heath, Sir Thomas, *Mathematics in Aristotle*, Clarendon Press, Oxford, 1949

IREM Histoire de problèmes, Histoire des mathématiques, Paris, Ellipses, 1994.

Jullien V. Sciences, agents doubles, Paris, Stock, 2002

Levy T. Figures de l’infini, Paris, Seuil, 1984.

Mattei J.-François, *Pythagore et les pythagoriciens*, Que sais-je, PUF, 1993

Robin L., *La théorie platonicienne des idées et des nombres d’après Aristote*, (1908), rep. Olms 1984

Szabo, Arpad, *L’aube des mathématiques grecques*, (1993), Mathesis, Vrin , 2000.

Vitrac Bernard, Les géomètres de la Grèce Antique, *Les génies de la science*, n° 21, février 2005

Usuels :

- Taton René (dir.) (1981), *Histoire générale des sciences*, 4 vol. Quadrige, PUF, 1995
- Brunschvig Jacques et Lloyd Geoffrey, *Le savoir grec*, Paris, Flammarion, 1996
- D’Alembert Jean le Rond (Ed.), *Encyclopédie Méthodique Mathématiques*, 1784, Réed. Paris, ACL, 1987

- Les textes de Platon et d’Aristote seront indiqués au fur et à mesure ; mais on se servira notamment du *Théétète*, du *Timée*, du *Ménon*, de la *République*, de *Métaphysique* M et N et de *Physique* II, IV, VI.

Quelques auteurs philosophes et mathématiciens

Thales, Pythagore, Platon, Aristote, Abélard, , Alhazen, Averroès, Guillaume d’Ockham, Thomas d’Aquin, Roger Bacon, Nicolas de Cuse, Francis Bacon, Buridan, Nicole Oresme, Galilée, René Descartes, Gassendi, A. Arnauld, Pascal, Malebranche, Hobbes, Newton, d’Alembert, Maupertuis, Leibniz, Hume, Spinoza, Georges Berkeley , Auguste Comte, Etienne de Condillac, Fontenelle, Kepler, Galilée, Locke, Denis Diderot, E. Kant, Charles Renouvier, Gaston Bachelard, Ernst Cassirer, M. Heidegger, E. Husserl, Bertrand Russell, Ludwig Wittgenstein, Jacques Lacan etc.