Principles of Mathematics

Chap. XI - Définition des nombres cardinaux.

B. Russell (trad. F. Schmitz)

107. Nous avons maintenant brièvement passé en revue l'appareil des notions de logique générale avec lesquelles les Mathématiques opèrent. Dans la présente Partie, il faut montrer comment cet appareil, sans faire appel à de nouveaux indéfinissables ou à de nouveaux postulats, est suffisant pour établir l'ensemble de la théorie des cardinaux en tant que branche particulière de la Logique [1]. Aucune branche des mathématiques n'a fait, ces dernières années, de plus grandes avancées que la théorie de l'Arithmétique. Le mouvement en faveur de la correction dans les déductions, inauguré par Weierstrass a été brillamment poursuivi par Dedekind, Cantor, Frege et Peano, et a atteint son objectif ultime grâce à la logique des relations. Comme la théorie mathématique moderne n'est qu'imparfaitement connue, même par la plupart des mathématiciens, je débuterai cette Partie par quatre chapitres esquissant ses grandes lignes sans faire appel au symbolisme. Puis j'examinerai le processus de déduction d'un point de vue philosophique pour voir si des hypothèses inaperçues ne se seraient pas glissées subrepticement dans le cours de l'argumentation.

108. On soutient souvent que ni le nombre et ni les nombres particuliers ne sont définissables. Maintenant « être définissable » est une expression qui en Mathématiques, a un sens précis, quoique ce soit relativement à un ensemble donné de notions [2]. Etant donné un ensemble de notions, un terme est définissable au moyen de ces notions si, et seulement si, c'est l'unique terme ayant à certaines de ces notions une certaine relation qui, elle-même, est l'une des dites notions. Mais philosophiquement, le mot *définition* n'a pas, en général, été utilisé en ce sens ; il a été, de fait, restreint à l'analyse d'une idée en ses constituants. Cet usage présente des inconvénients et il est, je pense, inutile ; de plus il semble négliger le fait que les touts *ne* sont

1. Cantor a montré qu'il est nécessaire de séparer l'étude des Cardinaux de celle des Ordinaux, qui sont des entités distinctes, les premiers étant plus simples, mais les deux étant essentiels aux Mathématiques ordinaires. Sur les nombres Ordinaux, cf. Chaps. XXIX, XXXVIII, *infra*.

2. Voir Peano, *F*. 1901, p. 6 sqq, et Padoa, « Théorie Algébrique des Nombres Entiers », *Congrès*, Vol. III, p. 314, sqq.

pas, en général, déterminés lorsque leurs constituants sont donnés, mais qu'ils sont eux-mêmes de nouvelles entités (qui peuvent être simples en un certain sens) définies, au sens mathématique, par certaines relations à leurs constituants. J'ignorerai donc à l'avenir le sens philosophique et ne parlerai que de définissabilité mathématique. Toutefois, je restreindrai plus cette notion que ne le font le Professeur Peano et ses disciples. Ils soutiennent que les diverses branches des mathématiques ont divers indéfinissables, au moyen desquels les autres idées de ces branches sont définies. Je soutiens - et c'est une part importante de mon propos que de le prouver - que les Mathématiques Pures tout entières (y compris la Géométrie et même la Dynamique rationnelle) ne contiennent qu'un seul ensemble d'indéfinissables, à savoir les concepts logiques fondamentaux discutés dans la première Partie. Lorsque l'on a énuméré les diverses constantes logiques, lesquelles d'entre elles nous considérons comme indéfinissables est quelque peu arbitraire, bien qu'apparemment il doive y en avoir quelques-unes qui soient indéfinissables dans toute théorie. Mais ce que je soutiens est que les indéfinissables des Mathématiques Pures sont tous de ce genre, et que la présence d'autres indéfinissables indique que notre discipline appartient aux Mathématiques Appliquées. De plus, des trois sortes de définitions admises par Peano - la définition nominale, la définition par postulat et la définition par abstraction [3] - je ne reconnais que la nominale : les autres, semble-t-il, ne sont rendues nécessaires que par le refus de Peano de considérer les relations comme faisant partie de l'appareil fondamental de la logique, et par sa précipitation injustifiée à considérer comme un individu ce qui est en réalité une classe. On comprendre mieux ces remarques en considérant leur application à la définition des nombres cardinaux.

109. Par le passé, ceux qui ont considéré les nombres comme étant définissables, ont couramment fait une exception pour le nombre 1, et défini les autres par son moyen. Ainsi 2 était $1 + 1$, 3 était $2 + 1$ et ainsi de suite. Cette méthode n'était applicable qu'aux nombres finis et marquait une différence embarrassante entre 1 et les autres nombres ; de plus, la signification de $+$ n'était, en général, pas expliquée. De nos jours, nous sommes à même d'améliorer grandement cette méthode. En premier lieu, puisque Cantor a montré comment traiter de l'infini, il est devenu tout à la fois souhaitable et possible de traiter des propriétés fondamentales des nombres d'une manière qui s'applique aussi bien aux nombres finis qu'aux nombres infinis. En second lieu, la calcul logique nous met en mesure de donner une définition exacte de l'addition arithmétique ; et, en troisième lieu, il est devenu tout aussi facile de définir 0 et 1 que de définir les autres nombres. Pour expliquer comment on fait cela, je vais d'abord présenter la définition des nombres par abstraction ; puis je mettrai en évidence des défauts formels dans cette définition, et la remplacerai par une définition

3. Cf. Burali-Forti, « Sur les différentes définitions du nombre réel », *Congrès*, III, p. 294 sqq.

nominale.

On admettra que les nombres sont applicables essentiellement aux classes. Il est vrai que, là où le nombre est fini, les individus peuvent être énumérés pour aboutir au nombre donné, et peuvent être comptés un à un sans aucune référence à un concept de classe. Mais toute collection finie d'individus forme une classe, de telle sorte que ce à quoi on aboutit est, après tout, le nombre d'une classe. Et là où le nombre est infini, les individus ne peuvent être énumérés, mais doivent être définis par intension, *i.e.* par quelque propriété commune en vertu de laquelle ils forment une classe. Ainsi lorsqu'un concept de classe est donné, il y a un certain nombre d'individus auxquels s'applique ce concept de classe, et ce nombre peut être considéré comme une propriété de la classe. C'est cette conception des nombres qui a rendu possible la théorie de l'infini tout entière, puisqu'elle nous libère de la nécessité d'énumérer les individus dont le nombre est en question. Cette conception dépend fondamentalement de la notion de *tout*, la conjonction numérique comme nous convînmes de l'appeler (§59). *Tous les hommes*, par exemple, dénote les hommes conjoints d'une certaine façon ; et il est par là dénoté qu'ils ont un nombre. De la même manière *tous les nombres* ou *tous les points* dénote les nombres ou les points conjoints d'une certaine façon, et, ainsi conjoints, les nombres ou les points ont un nombre. Les nombres, donc, doivent être considérés comme propriétés des classes.

La question suivante est : dans quelles circonstances deux classes ont-elles le même nombre ? La réponse est qu'elles ont le même nombre quand leurs termes peuvent être corrélés un à un, de sorte qu'à chaque terme de l'une ne corresponde qu'un et un seul terme de l'autre. Cela suppose qu'il y ait une relation un-un quelconque dont le domaine est l'une des classes et le domaine converse l'autre. Ainsi, par exemple, si, dans une communauté, tous les hommes et toutes les femmes sont mariés et que la polygamie, comme la polyandrie, est interdite, le nombre des hommes doit être le même que celui des femmes. On pourrait penser qu'une relation un-un ne peut être définie sans faire référence au nombre 1. Mais ce n'est pas le cas. Une relation est un-un lorsque, si x et x' ont la relation en question à y alors x et x' sont identiques ; tandis que si x a la relation en question à y et y', alors y et y' sont identiques. Il est ainsi possible de définir ce que l'on veut dire par relation un-un sans recourir à la notion d'unité. Mais pour tenir compte du cas où les deux classes n'ont pas de termes, il est nécessaire de modifier légèrement cette manière de rendre compte du fait que deux classes ont le même nombre. Car s'il n'y a pas de termes, ils ne peuvent être corrélés un-un. Nous devons dire : deux classes ont même nombre si, et seulement si, il y a une relation un-un dont le domaine inclut l'une des classes et qui est telle que la classe des corrélats des termes de cette classe est identique à l'autre classe. De là, il apparaît que deux classes n'ayant aucun terme ont toujours le même nombre de termes ; car quelle que soit la relation un-un que nous considérons, son domaine inclut la classe nulle et la classe des corrélats de la classe nulle est elle aussi la classe nulle. Lorsque deux classes ont le même nombre, on dit qu'elles sont similaires.

Certains lecteurs pourraient penser qu'une définition de ce que veut dire que deux classes ont le même nombre, est totalement inutile. Ils pourraient dire que la manière d'établir cela est de compter les deux classes.C'est ce genre d'idée qui a, jusqu'à présent, empêcher de montrer que l'Arithmétique est une branche de la Logique Pure. Car la question « que signifie 'compter' ? » se pose immédiatement. On répond habituellement à cette question par des considérations psychologiques hors de propos, comme : compter consiste en des actes d'attention successifs. Pour compter 10, je suppose que dix actes d'attention sont requis ; ce qui est certainement une définition très utile du nombre 10 ! Compter a, en réalité, une signification tout à fait satisfaisante qui n'est pas psychologique. Mais cette signification est extrêmement complexe ; elle n'est applicable qu'aux classes qui peuvent être bien ordonnées, sans que l'on sache si ce sont toutes les classes ; et [cette signification] ne donne que le nombre d'une classe quand ce nombre est fini - cas rare et exceptionnel. Nous ne devons donc pas introduire le fait de compter, lorsqu'il est question de la définition du nombre [4]

La relation de similarité entre classes a les trois propriétés de réflexivité, symétrie et transitivité ; c'est à dire que si u, v, w sont des classes, u est similaire à elle-même ; si u est similaire à v alors v est similaire à u ; et si u est similaire à v et v est similaire à w, alors u est similaire à w. Ces propriétés découlent toutes trois de la définition. Maintenant, Peano et le sens commun soutiennent que le fait que deux termes ont une relation ayant ces trois propriétés indique que ces deux termes ont une propriété commune, et *vice versa*. Cette propriété commune, nous l'appelons leur nombre. C'est la définition des nombres par abstraction.

110. Maintenant, cette définition par abstraction, et en général la procédure utilisée dans de telles définitions, souffrent d'un défaut formel absolument fatal : elle ne montre pas qu'un objet seulement satisfait la définition. Ainsi, au lieu d'obtenir *une* propriété commune des classes similaires, qui est *le* nombre des classes en question, nous obtenons une *classe* de telles propriétés, sans que l'on puisse décider du nombre de termes contenus dans cette classe. Pour mettre au clair ce point, examinons ce que l'on veut dire par propriété commune dans le cas qui nous occupe. Ce que l'on veut dire est que toute classe a à une certaine entité, son nombre, une relation qu'elle n'a à rien d'autre, mais que toutes les classes qui lui sont similaires (et aucune autre entité) ont au nombre en question. C'est à dire qu'il y a une relation de plusieurs à un que toute classe a à son nombre et à rien d'autre. Ainsi, le plus que peut montrer

4. Ndt. : voir, à la fin, la traduction du §129. qui affine cette critique.

la définition par abstraction, c'est que tout ensemble d'entités telles que à chacune de ces entités, une classe quelconque ait une relation de plusieurs à un, et que à une et une seulement de ces entités, toute classe donnée ait cette relation et que toutes les classes similaires à une classe donnée aient cette relation à la même entité de cet ensemble, apparaît comme étant l'ensemble des nombres, et chaque entité de cet ensemble est *le* nombre d'une classe. Si donc il y beaucoup de tels ensembles d'entités - et il est facile de prouver qu'il y en a un nombre infini - chaque classe aura beaucoup de nombres et la définition ne parvient pas à définir le nombre d'une classe. Cet argument est parfaitement général et montre que les définitions par abstraction ne sont jamais un procédure valide.

111. Il y a deux manières de tenter de remédier à ce défaut. L'une d'elle consiste à définir comme étant le nombre d'une classe, la classe entière des entités, choisies chacune dans un des ensembles d'entités ci-dessus, et auxquelles toutes les classes similaires à la classe donnée (et aucune autre) ont une relation quelconque de plusieurs à un. Mais cette méthode est en pratique sans intérêt, puisque toutes les entités sans exception appartiennent à chaque classe de ce genre, de sorte que chaque classe aura à titre de nombre la classe de toute sorte d'entités disparates. L'autre remède est plus praticable et s'applique dans tous les cas où Peano utilise les définitions par abstraction. Cette méthode consiste à définir comme nombre d'une classe, la classe de toutes les classes similaires à la classe donnée. L'appartenance à cette classe de classes (considérée comme un prédicat) est une propriété commune à toutes les classes similaires et à aucune autre ; de plus, toute classe de l'ensemble des classes similaires a, à cet ensemble, une relation qu'il n'a à rien d'autre et que toute classe a à son propre ensemble. Ainsi cette classe de classes satisfait-elle toutes les conditions et a le mérite d'être déterminée dès qu'une classe est donnée et d'être différente pour deux classes non similaires. C'est donc une définition irréprochable du nombre d'une classe en termes purement logiques.

Considérer un nombre comme une classe de classes doit sembler, au premier abord, un paradoxe totalement indéfendable. Ainsi Peano (F. 1901, §32) remarque que « nous ne pouvons identifier le nombre [d'une classe] a , avec la classe des classes en question [i.e. les classes des classes similaires à a], car ces objets ont des propriétés différentes. » Il ne nous dit pas de quelles propriétés il s'agit et pour ma part, je suis incapable de les découvrir. Il est probable qu'il lui semblait évident qu'un nombre n'est pas une classe de classes. Mais on peut dire quelque chose pour atténuer l'apparence de paradoxe de cette thèse. En premier lieu, des mots tels que *couple* ou *trio* dénotent bien évidemment des classes de classes. Ainsi ce qu'il nous faut dire c'est que, par exemple, « deux hommes » veut dire « produit logique de la classe des hommes et de couple », et « il y a deux hommes » veut dire « il y a une classe d'hommes qui est aussi un couple ». En second lieu, si nous nous souvenons qu'un concept de classe n'est pas lui même une collection mais une propriété par laquelle une collection est définie, nous voyons que, si nous définissons le nombre comme le concept de classe, et non la classe, un nombre est réellement défini comme une propriété commune d'un ensemble de classes similaires et de rien d'autre. Cette manière de voir efface dans une grande mesure l'apparence de paradoxe. Elle présente cependant une difficulté philosophique, tout comme, plus généralement, le rapport entre classe et prédicat. Il se peut qu'il y ait de nombreux prédicats communs à une certaine collection d'objets et à aucun autre. En ce cas, ces prédicats sont tous considérés par la Logique Symbolique comme équivalents et l'un quelconque d'entre eux est dit égal à n'importe quel autre. Ainsi, si le prédicat était défini par la collection des objets, nous n'obtiendrons pas, en général, un seul prédicat, mais une classe de prédicats ; pour cette classe de prédicats, nous devrions demander un nouveau concept de classe, et ainsi de suite. Le seul concept de classe disponible serait « prédicabilité de la collection donnée et d'aucune autre ». Mais dans le cas présent, où la collection est définie par une certaine relation à l'un de ses termes, il y a quelque danger d'erreur logique. Soit u, une classe ; nous disions qu'alors le nombre de u était la classe des classes similaires à u. Mais « similaire à u » ne peut être le véritable concept constituant le nombre de u ; car, si v est similaire à u, « similaire à v » définit la même classe, bien qu'il s'agisse d'un concept différent. Ainsi nous demandons, à titre de prédicat définissant la classe des classes similaires, un concept n'ayant aucune relation spéciale à une, ou plus d'une, des classes constituantes. S'agissant de tous les nombres particuliers qui peuvent être mentionnés, finis ou infinis, un tel prédicat peut, de fait, être facilement découvert ; mais lorsque la seule chose que nous savons d'un nombre est qu'il est nombre d'une certaine classe u, il est naturel qu'une référence particulière à u apparaisse dans la définition. De toute manière, ce n'est pas ce qui est en cause. Ce qui l'est véritablement est que ce qui est défini est le même, que nous utilisions le prédicat « similaire à u » ou le prédicat « similaire à v », dès lors que u et v sont similaires. Cela montre que ce n'est pas le concept de classe ou le prédicat définissant qui est défini mais la classe elle-même dont les termes sont les diverses classes qui sont similaires à u ou à v. Ce sont donc de telles classes qui doivent être considérées comme constituant les nombres et non des prédicats tels que « similaire à u ».

Ainsi, pour nous résumer : mathématiquement, un nombre n'est rien d'autre qu'une classe de classes similaires ; cette définition autorise la déduction de toutes les propriétés habituelles des nombres, qu'ils soient finis ou infinis, et c'est la seule (pour autant que je sache) qui est possible dans les termes des concepts fondamentaux de la logique générale. Mais philosophiquement, nous pouvons admettre que toute collection de classes similaires a quelque prédicat commun qui ne vaut que pour les classes en question, et si nous pouvons trouver à l'examen qu'il y a une certaine classe de tels prédicats communs, chacun d'entre eux s'appliquant à une et une seule collection de classes similaires, alors nous pouvons, si cela nous arrange, appeler cette classe particulière de prédicats, la classe des nombres. Pour ma part, je ne sais pas s'il y a une telle classe de prédicats mais je sais que s'il y avait une telle classe, cela ne concernerait en rien les Mathématiques. Toutes les fois que les Mathématiques dérivent une propriété commune d'une relation réflexive, symétrique et transitive, tout ce qui, de cette commune propriété, concerne les mathématiques, est entièrement fourni par la classe des termes ayant la relation donnée à un terme donné ; et c'est précisément ce qui se passe avec les nombres cardinaux. A l'avenir, j'accepterai donc la définition ci-dessus puisqu'elle est à la fois précise et adéquate aux usages mathématiques.

[*Reprise de la critique de l'introduction du décompte dans les définitions traditionnelles des entiers ; cf. §109, ci-dessus*]

129. L'opinion communément reçue, concernant les nombres finis, est qu'ils résultent de l'acte de compter, ou, comme certains philosophes préféreraient le dire, d'un acte de synthèse. Malheureusement, ceux qui soutiennent ce point de vue n'ont pas analysé la notion de décompte : s'il l'avaient fait, ils auraient vu qu'elle est très complexe et présuppose les nombres mêmes qu'elle est supposée engendrer.

Le processus du décompte a, évidemment un aspect psychologique, mais cela n'a rien à voir avec la théorie de l'Arithmétique. Ce que je souhaite mettre en évidence, c'est le processus logique impliqué dans l'acte de compter, qui est comme suit. Lorsque nous disons un, deux, trois, etc., nous considérons nécessairement une relation un-un qui se tient entre les nombres utilisés dans le décompte et les objets comptés. Ce qui est signifié par « un, deux, trois » est que les objets indiqués par ces nombres sont leurs corrélats relativement à la relation que nous avons en tête. (Cette relation, soit dit en passant, est habituellement très complexe, et est susceptible de comporter une référence à notre état d'esprit du moment) Ainsi, nous corrélons une classe d'objets avec une classe de nombres ; et la classe des nombres consiste en tous les nombres depuis 1 jusqu'à un nombre n. La seul inférence immédiate que l'on peut faire à partir de cette corrélation est que le nombre d'objets est le même que le nombre de nombres de 1 à n. Un pas de plus est nécessaire pour montrer que ce nombre de nombres est n, ce qui, de fait, n'est vrai que pour les nombres finis, ou, en un sens plus large, lorsque n est α_0 (le plus petit des nombres infinis). De plus le processus du décompte, ne fournit aucune indication sur ce que sont les nombres, pourquoi ils forment une suite, ou comment on prouve (au cas où cela est vrai) qu'il y a n nombres de 1 et n. En conséquence, compter n'a rien à voir avec les fondements de l'Arithmétique ; et nous pouvons donc écarter cette notion jusqu'à ce que nous en venions à l'ordre et aux nombres ordinaux.