

Contrôle continu de logique n° 2 – L1 – S1

Correction

13 Décembre 2013

1 Équivalences logiques (4 pts)

Soient ϕ et ψ des formules quelconques, \top une tautologie, \perp une contradiction et \equiv le signe pour l'équivalence logique, vous répondrez – *en utilisant un seul signe* – aux questions suivantes :

- | | |
|--|---|
| 1. $[\sim(\phi \rightarrow \top) \rightarrow \perp] \equiv \top$ | 5. $[(\sim\phi \rightarrow \top) \rightarrow \perp] \equiv \perp$ |
| 2. $[(\perp \wedge \phi) \rightarrow \psi] \equiv \top$ | 6. $[(\phi \vee \psi) \vee (\top \vee \phi)] \equiv \top$ |
| 3. $[(\top \vee \perp) \wedge (\perp \vee \phi)] \equiv \phi$ | 7. $\{\top \vee [\perp \wedge (\perp \vee \phi)]\} \equiv \top$ |
| 4. $[\sim\phi \rightarrow (\top \rightarrow \perp)] \equiv \phi$ | 8. $\sim[(\phi \rightarrow \top) \rightarrow \perp] \equiv \top$ |

Ces équivalences logiques se justifient de la façon suivante (justification qui n'était toutefois pas demandée) – gardez bien en tête que les symboles ϕ et ψ sont des métavariabes et peuvent tenir lieu de n'importe quelle formule bien formée :

TABLE 1 – Justification de l'équivalence 1

$[\sim(\phi \rightarrow \top) \rightarrow \perp]$	\top
F V V V V F	V
F F V V V F	V

On constate alors que la formule est tautologique (est un schéma de tautologies). Faites en outre attention aux parenthèses, qui sont ici cruciales. Par exemple :

TABLE 2 – Justification de l'équivalence 5

$[(\sim\phi \rightarrow \top) \rightarrow \perp]$	\perp
F V V V F F	F
V F V V F F	F

2 Formes Normales Conjonctives (6 pts)

2.1 (2 pts)

Mettez cette formule en FNC en détaillant chaque étape suivie. Que pouvez-vous en conclure ?

$$p \rightarrow [q \rightarrow (p \wedge q)]$$

Correction

Transformons la formule en FNC :

1. $\sim p \vee [q \rightarrow (p \wedge q)]$ – Équivalences connecteurs : $(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\sim \phi \vee \psi)$
2. $\sim p \vee [\sim q \vee (p \wedge q)]$ – *Idem*
3. $(\sim p \vee \sim q \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee q)$ – Distributivité

La formule est tautologique : nous trouvons dans chacun des conjoints une lettre de proposition ainsi que sa négation. Chaque conjoint est tautologique, la conjonction est donc tautologique.

2.2 (4 pts)

Mettez cette formule en FNC en détaillant chaque étape suivie. Que pouvez-vous en conclure ?

$$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$$

Correction

Mise en FNC :

1. $\sim [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \vee [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$ – Équivalences connecteurs : $(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\sim \phi \vee \psi)$
2. $\sim [\sim p \vee (\sim q \vee r)] \vee [\sim (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee r)]$ – Équivalences connecteurs : $(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\sim \phi \vee \psi)$
3. $[p \wedge \sim (\sim q \vee r)] \vee [(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee r)]$ – Loi de De Morgan (désormais « DM »)
4. $[p \wedge q \wedge \sim r] \vee [(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee r)]$ – *Idem*
5. $[p \wedge q \wedge \sim r] \vee [(\sim p \vee r \vee p) \wedge (\sim p \vee r \vee \sim q)]$ Distributivité de ce qui se trouve entre crochets
6. $[p \wedge q \wedge \sim r] \vee [(\sim p \vee r \vee \sim q)]$ Suppression de la tautologie
7. $(\sim p \vee r \vee \sim q \vee p) \wedge (\sim p \vee r \vee \sim q \vee q) \wedge (\sim p \vee r \vee \sim q \vee \sim r)$ Distributivité

La formule est tautologique : nous trouvons dans chacun des conjoints une lettre de proposition ainsi que sa négation.

3 Forme Normale Disjonctive (2 pts)

Mettez cette formule en FND en détaillant chaque étape suivie. Que pouvez-vous en conclure ?

$$\sim \{[(p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow p\}$$

Correction

Mise en FND :

1. $(p \vee q) \wedge \sim q \wedge \sim p$ – Équivalences connecteurs : $\sim(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\phi \wedge \sim \psi)$
2. $(\sim q \wedge \sim p \wedge p) \vee (\sim q \wedge \sim p \wedge q)$ Distributivité

Cette formule est contradictoire : chacun des disjoints contient une lettre de proposition et sa négation. Chaque disjunct est contradictoire, la disjonction est donc contradictoire.

4 Conditions de vérité et conditions de fausseté (6 pts)

En utilisant la procédure de mise en forme normale, déterminez les conditions de vérité et les conditions de fausseté des formules suivantes :

4.1 (2 pts)

$$(p \vee q \vee r) \rightarrow \sim[(r \wedge p) \rightarrow p]$$

Correction

Mettons cette formule en FNC / FND :

1. $\sim(p \vee q \vee r) \vee \sim[(r \wedge p) \rightarrow p]$ – Équivalences connecteurs : $(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\sim \phi \vee \psi)$
2. $(\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (r \wedge p \wedge \sim p)$ DM / – Équivalences connecteurs : $\sim(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\phi \wedge \sim \psi)$
3. $(\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$ Suppression de la contradiction

Cette formule est vraie à une seule condition, à savoir sous l'interprétation suivante :

- p : F
- q : F
- r : F

Sous toutes les autres interprétations, elle est fausse.

4.2 (2 pts)

$$\sim[(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)]$$

Correction

Mettons cette formule en FNC / FND :

1. $p \wedge q \wedge \sim(r \vee s)$ – Équivalences connecteurs : $\sim(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\phi \wedge \sim \psi)$
2. $p \wedge q \wedge \sim r \wedge \sim s$ – DM

Cette formule n'est vraie qu'à une seule condition, sous l'interprétation suivante :

- p : V
- q : V

– $r : F$

– $s : F$

Sous toutes les autres interprétations, elle est fausse.

4.3 (2 pts)

$$\sim[\sim(p \rightarrow \sim q) \wedge \sim r] \rightarrow (\sim p \wedge q \wedge r)$$

Correction

Mettons cette formule en FND :

1. $[\sim(p \rightarrow \sim q) \wedge \sim r] \vee (\sim p \wedge q \wedge r)$ – Équivalences connecteurs : $(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\sim\phi \vee \psi)$
2. $[p \wedge q \wedge \sim r] \vee [\sim p \wedge q \wedge r]$ – Équivalences connecteurs : $\sim(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\phi \wedge \sim\psi)$

Nous avons alors les conditions de vérité de la formule, sous les interprétations suivantes :

– Avec $p : F$, $q : V$ et $r : V$

– Avec $p : V$, $q : V$ et $r : F$

Sous toutes les autres interprétations, la formule est fausse.

5 Langage-objet et Métalangage (2 pts)

Expliquez en quelques lignes et d'une manière précise la différence entre le langage-objet et le métalangage.

Correction

Question de cours.