SCIENCES et MUSIQUE AU COURS DE L'HISTOIRE (SMH)

EXTRAIT DES NOTES DE COURS L3 Parcours Musique Philosophie

Guy BOISTEL – Séance n°GB1 – update 9/9/2021

L'arithmétique de base de la musique spéculative

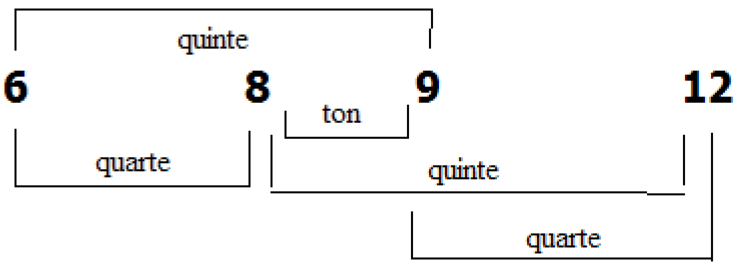
Dans la suite du cours, nous allons parler des intervalles reconnus par PYTHAGORE et commentés et développés dans les ouvrages jusqu'à RAMEAU (et encore commentés et présentés dans les ouvrages). On parle de rapports de poids, de longueur de corde etc.

Voyons comment cette arithmétique élémentaire se traite afin que vous soyez à l'aise avec quelques démonstrations que nous verrons chez les pythagoriciens, chez Aristoxène ou chez Descartes ou Rameau, qui constituent le cœur des polémiques…

1. Les marteaux de Pythagore.

Nous verrons au cours suivant d'où provient la légende de la reconnaissance des intervalles par Pythagore chez son forgeron. Cette légende ou tradition explique que, un jour, en passant devant chez son forgeron, PYTHAGORE reconnaît des intervalles musicaux, donc déjà pratiqués puisque reconnus. Pythagore fait peser les marteaux et ceux-ci se trouvent être dans des rapports correspondants aux nombres 6, 8, 9, 12. Notez cette tétrade de nombres qui est importante et qui marque toute la littérature médiévale en musique.

2. Les intervalles musicaux reconnus se trouvent être : →



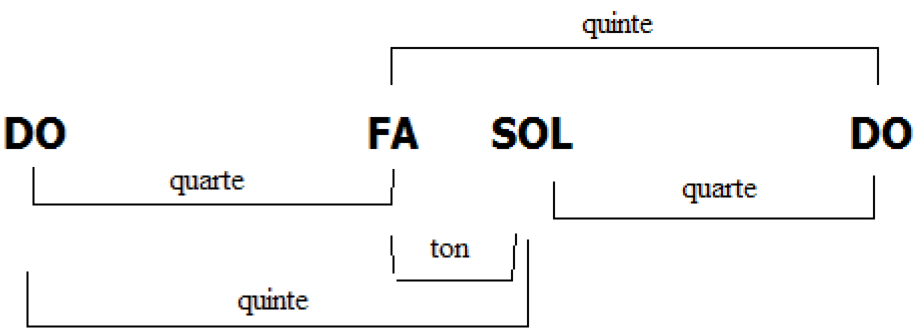
Vérifions les rapports[1] :

$\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ et $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ rapport de quarte

$\frac{9}{6} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ rapport de quinte en musique

Les quatre sons du tétracorde grec sont donc reliés par les rapports suivants ou consonances majeures

1----------------------------4/3-------3/2---------------------------2/1



- Expression de l'intervalle entre la quarte et la quinte = le ton = 5te/4te = $\frac{3/2}{4/3} = \frac{3.3}{4.2} = \frac{9}{8}$

[1] Les règles sont précisées par d'Alembert au XVIII[e] siècle dans *Les Elémens de musique de M. Rameau* (1779, 2[e] édition, Livre I, chap. I, pp. 14-17).

3. Construction d'une gamme pythagoricienne (1)

- Expression de la tierce pythagoricienne : tierce maj = 2 tons successifs = $\frac{9}{8}$ x $\frac{9}{8}$ = $\frac{81}{64}$
- Expression de la seconde majeure = 2 quintes successives ramenées à une octave =

  2nde majeure = ($\frac{3}{2}$ x $\frac{3}{2}$)/2 = $\frac{9}{4}$ / 2 = $\frac{9}{8}$ c'est-à-dire le ton
- Expression de la sixte majeure = 3 quintes successives ramenées à une octave (do-sol-ré-la) = ($\frac{3}{2}$ x $\frac{3}{2}$ x $\frac{3}{2}$) =$\frac{27}{8}$ / 2 = $\frac{27}{16}$ ou encore = une quinte et 1 ton = $\frac{3}{2}$ x $\frac{9}{8}$ = $\frac{27}{16}$
- Idem pour la septième majeure = 5 quintes successives ramenées à une octave (do-sol-ré-la-mi-si → on est dans la 4ieme octave)

  ($\frac{3}{2}$ x $\frac{3}{2}$ x $\frac{3}{2}$ x $\frac{3}{2}$ x $\frac{3}{2}$) =$\frac{243}{32}$ / 4 = $\frac{243}{128}$

  Ou encore, une quinte et une tierce majeure = $\frac{3}{2}$ x $\frac{81}{64}$ $\frac{243}{128}$

On obtient donc un mode que l'on appellerait actuellement diatonique ou gamme pythagoricienne où l'on place aussi les écarts principaux

Quarte/tierce = $\frac{4/3}{81/64}$ = $\frac{4.64}{81.3}$ = $\frac{256}{243}$ et octave/septième = 2/ 243/128 = 2.128/243 = 256/243

<table>
<tr><td>DO</td><td>RE</td><td>MI</td><td>FA</td><td>SOL</td><td>LA</td><td>SI</td><td>DO</td></tr>
<tr><td>1</td><td>9/8</td><td>81/64</td><td>4/3</td><td>3/2</td><td>27/16</td><td>243/128</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="8">9/8 9/8 256/243 9/8 9/8 9/8 256/243</td></tr>
</table>

Que l'on peut considérer comme deux tétracordes juxtaposés : do-ré-mi-fa // sol-la-si-do donnant deux intervalles de quarte (do-fa et sol-do) dans leurs notes extrêmes, ce qui correspond à la pratique dans la Grèce ancienne.

Les consonances sont l'unisson, la quarte juste (4/3), la quinte juste (3/2) et l'octave (2/1).

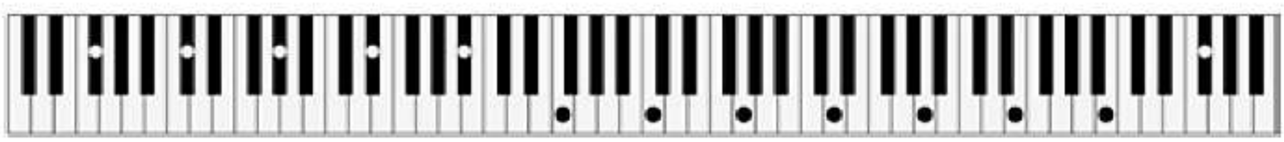
Les dissonances sont la tierce (81/64) et la sixte (27/16) et la septième qui ne porte pas de nom avant la Renaissance… Jouée sans doute mais pas nommée…

4. Le problème de fermeture des quintes et des octaves et le problème de la construction d'une gamme chromatique (2)

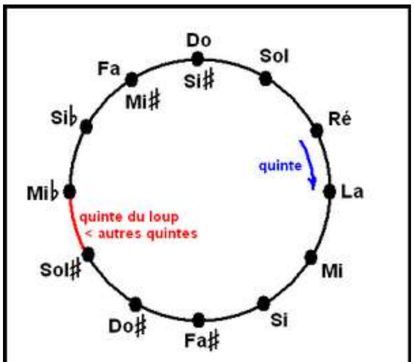
En progressant par cycle de quintes, on retrouve toutes les notes et les intermédiaires :

Do-sol-ré-la-mi-si-fa#-do#-sol#-ré#-la#-mi#-si# qui doit correspondre au DO ! Donc 12 quintes justes successives doivent correspondre à 7 octaves justes.

Si on part du Fa# sur le piano → 7 octaves au bout de 12 quintes.



Dans l'idéal, sous forme de cycle : do=si# - Mais ce n'est pas le cas !



Le cycle des quintes

Le problème mathématique posé est le suivant : existe-t-il des entiers n et m tel que : $\frac{a^m}{b^n}$=1 ou encore que la commensurabilité est assurée entre 12 quintes justes et 7 octaves justes ?

En arithmétique : $\frac{quinte^{12}}{octave^7} = \frac{(\frac{3}{2})^{12}}{2^7} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = 1$? et non .... = 1,013643… car 2 et 3 sont premiers entre eux et à l'époque de Pythagore, on rejette les nombres irrationnels comme racine carrée de 2.

$\frac{3^{12}}{2^{19}}$ = 1, 013643… = environ 1,014… soit environ 74/73

Ce qui pose le problème de l'écart entre le si# et le do qui devraient être identiques. Cet écart se nomme le **comma pythagoricien** = 531441/524288 qu'on approxime à $\frac{\mathbf{74}}{\mathbf{73}}$ **= 1,013698…**

5. Les médiétés ou moyennes dans l'antiquité

Rappelons aussi l'importance des médiétés et leurs rapports avec les intervalles pythagoriciens.

Les principales médiétés sont résumées dans le tableau suivant :

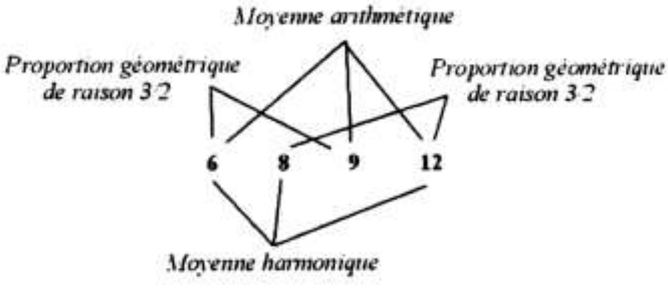
Médiété arithmétique	Médiété géométrique	Médiété harmonique
$M_a = \frac{x+y}{2}$	$M_g^2 = xy$	$M_h = \frac{2xy}{x+y}$

Les trois principales médiétés.

Appliquées aux poids des marteaux de Pythagore, sur la série 6, 8, 9 12, voici ce que cela donne si l'on prend les extrêmes (octave, 12 :6) :

M$_{arith}$ = 12+6/2 = 9 ; M$_{géom}$ = racine (12x6) = 8,48 ; M$_{harm}$ = 2 x 12x6 / (12+6) = 8

Ou sous forme graphique : →



La proportion musicale.

6. D'où un second problème : celui de la division du ton :

Quels sont donc les intervalles entre mi-fa et si#-do ? Entre do et do# ? entre ré et réb ? etc.

→ Plusieurs réponses selon les époques et le contexte mathématico-philosophique et les auteurs…

Restons chez les pythagoriciens : le <u>rapport 9/8</u> (**epogdoon**) est-il divisible par 2 ? Pythagore répond **NON**. Cette réponse conduit à diviser le ton en deux parties non égales et l'existence de deux <u>demi-tons</u> (**diesis**) (la réponse oui conduit à entrer un nombre comme $\sqrt{2}$, ce qui est inimaginable ; Pythagore ne traite que les nombres entiers (on verra pourquoi dans le cours suivant).

***Encadré** : pourquoi le ton 9/8 ne peut-il être divisé en 2 parties égales chez les pythagoriciens ? N'oublions jamais que pour les pythagoriciens, un intervalle musical ne peut être défini que par deux nombres entiers. Chercher à diviser le ton 9/8 en deux parties égales revient à chercher sa moyenne géométrique et donc évaluer la valeur de la racine carrée du rapport épimore :* $\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{2.\sqrt{2}}$ *;* $\sqrt{2}$ *étant irrationnel, le rapport ne peut être rationnel. Diviser le ton en deux parties égales est donc impossible.*

Eric Decreux (2008, 133) explique comment Boèce évalue cette impossibilité à l'aide des suites proportionnelles de nombres entiers. En multipliant par 2 en haut et en bas le rapport 9/8, on obtient le rapport 18/16 dont le seul nombre entier qu'il est possible d'intercaler, est le nombre 17 ; les deux rapports intermédiaires 18/17 et 17/16 correspondraient aux demi-tons supposés égaux, et qui redoublés, devraient donner le ton. Or $17^2/16^2$ *excède le ton (=1,129) et* $18^2/17^2$ *est inférieur au ton (=1,121), le ton pythagoricien 9/8 = 1,125 ! N'oublions pas que nos anciens étaient rompus à l'évaluation de ces rapports proportionnels (et non aux valeurs décimales)… Pour Boèce, le demi-ton n'est pas le partage du ton en deux parties égales mais bien un partage naturel du ton en deux parties (en l'occurrence inégales mais répondant à des critères sur ce que doivent être de bons intervalles musicaux).*

Ces deux « demi-tons » ou intervalles résultant de la division naturelle du ton en deux parties, sont l'**apotome** et le **limma.**

On décompose le ton : $\frac{9}{8} = \frac{3^2}{2^3} = \frac{3^7}{2^{11}} \times \frac{2^8}{3^5} = \frac{apotome}{limma}$ 9/8 = 1,125….

L'apotome est le demi-ton supérieur = $\frac{\mathbf{2187}}{\mathbf{2048}}$ = 1,068.. ; le limma l'inférieur = $\frac{\mathbf{256}}{\mathbf{243}}$ = 1 ,053…

Alors :

Quarte = tierce + limma (calcul à faire…)

Octave = 5 tons + 2 limmas

Le limma est le demi-ton diatonique pour nous ; l'apotome est le demi-ton chromatique, celui que nous trouverons entre do et do#..

Dans le cours suivant (séance 2 - GB1), nous verrons que d'autres Pythagoriciens ont proposé d'autres divisions du ton, ainsi que le disciple d'Aristote, Aristoxène.

Ces regards portent sur la nature même des rapports observés entre les consonances et les différents intervalles. Voici en quelques mots une partie de leurs réponses respectives :

- **Archytas de Tarente (430-360…)** : il faut sauver le **rapport épimore** $\frac{\boldsymbol{n+1}}{\boldsymbol{n}}$; il propose de partager la quarte en des intervalles ayant la même construction ; les intervalles sont tous du même type, épimore ou superpartiel (chez Euclide). Et entre une tierce juste à 5/4 dans cette gamme néo-pythagoricienne :

DO	RE	MI	FA				
1	9/8	5/4	4/3				
	9/8	10/9	16/15	9/8			

La tierce ainsi définie (5/4) reste prohibée par la musique spéculative… Quid de la pratique ?....

- **Aristoxène (360-280)** : (lire son traité) – La tierce commence à avoir droit de cité dans la musique presque 300 ans après Pythagore. Les deux tétracordes aristoxéniens sont juxtaposés comme suit :

DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO
1	9/8	5/4	4/3	3/2	27/16	15/8	2
16/15	9/8	10/9	16/15		9/8	9/8	10/9

La gamme aristoxénienne comporte donc 5 tons, inégaux (9/8 et 10/9) et un ton composé de deux demi-tons égaux de valeur 16/15, intermédiaire entre les valeurs $\sqrt{\frac{9}{8}}$ et $\sqrt{\frac{10}{9}}$. C'est une gamme à 6 tons. Mais on a ici deux sortes de tons diatoniques. C'est à l'époque de ZARLINO (fin XVIe) que le défaut apparaîtra avec la question de la transposition.

7. Autres cas de non fermeture des intervalles : le comma syntonique de Zarlino.

4 quintes = 2 octaves + tierce ? do-sol-ré-la-mi = do-do-do-mi ? avec une tierce juste à 5/4 ?

$(3/2)^4 = 2^2.(5/4)$? Le rapport $\frac{3/2^4}{2^2.5/4}$ est différent de 1 et vaut : $\mathbf{\frac{81}{80}}$ **ce rapport est appelé comma syntonique.** Il a été mis en évidence par ZARLINO mais on est déjà à une autre époque…

On peut étudier tous les cas de non fermeture des intervalles, une histoire de commensurabilité de cycles divers… ; un parallèle peut être fait avec le problème de la mesure du temps astronomique et de l'ajustement des calendriers ; j'y reviendrai dans le cours sur ZARLINO et les Galilée Père et fils.

8. Le monocorde : un paradigme

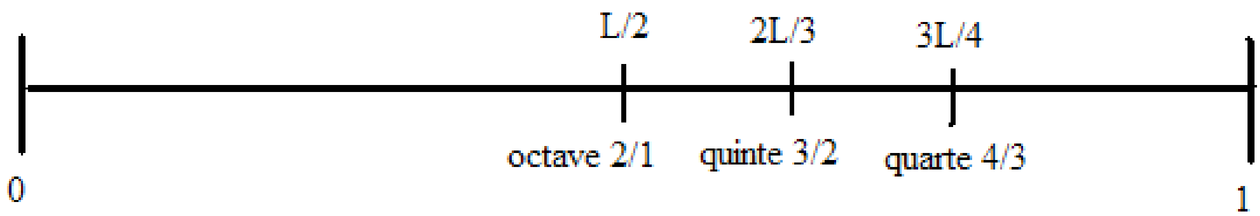
Pour finir, le monocorde pythagoricien constitue un paradigme en musique tenace (on en parlera encore au XVIIIe siècle avec RAMEAU…).

Prenons une corde tendue sur un chevalet et divisons la corde en 2, 3 et 4 ; nous obtenons les rapports en longueur et en « fréquence » suivants :

L/2 est l'octave 2/1

2L/3 donne la quinte 3/2

3L4 donne la quarte 4/3



Retenons que le rapport en longueur est l'inverse du rapport en fréquence des sons.

Si on divise la corde en deux, le son est plus aigu et la fréquence est multipliée par 2. Il faut faire attention alors dans la littérature musicologique, ancienne et moderne, aux types de rapports qui sont donnés et la manière dont ils sont considérés.

On voit d'emblée la question : pourquoi s'arrêter à une division par 4 ? La réponse commence avec le prochain cours !

9. Références :

D'Alembert, 1752/1779, *Elémens de musique théorique et pratique suivant les principes de M. Rameau*, Paris : Livre I, *Théorie de l'harmonie*, 14-17.

Arbonès J., Milrud P., 2013, *L'harmonie est numérique. Musique et mathématiques*, Coll. « Le Monde est mathématique », Paris, Ed. Institut Henri Poincaré.

Decreux Éric, 2008, *Mathématiques, sciences et musique. Une introduction historique*, Paris, Ellipses. [bibliothèque de philosophie]

Lattard, J., 1988, *Gammes et tempéraments musicaux*, Paris, Masson (technique mais assez complet).

Parzysz Bernard, 1983, *Musique et mathématique, suivi de Gammes naturelles par Yves Hellegouarch*, Bulletin de l'APMEP, n°53.

D'Alembert (*Elémens de musique… de M. Rameau, 1779, 2e éd.*), 16-17

16 *ELEMENS DE MUSIQUE*

I PART. *Chap. I.*

SECONDE EXPÉRIENCE.

22. Il n'y a perſonne qui ne s'apperçoive de la reſſemblance qu'il y a entre un ſon & ſon

Pour avoir la *quarte* au-deſſus du ſon 1, il faut prendre la douzieme au-deſſous du ſon 1, & la double octave au-deſſus de cette douzieme. En effet, la douzieme au-deſſous d'*ut*, par exemple, eſt *fa*, dont la double octave eſt la quarte *fa* au-deſſus d'*ut*. Donc, puiſque la douzieme au-deſſous de 1 eſt $\frac{1}{3}$, il s'enſuit que la double octave au-deſſus de cette douzieme, c'eſt-à-dire la quarte du ſon 1 en montant, ſera $\frac{1}{3}$ multiplié par 4, ou $\frac{4}{3}$.

Enfin la tierce majeure n'étant que la double octave au-deſſous de la dix-ſeptieme, il s'enſuit que la tierce majeure au-deſſus du ſon 1 ſera 5 diviſé par 4, c'eſt-à-dire $\frac{5}{4}$. . . . . .

La tierce majeure d'un ſon, par exemple, la tierce majeure *mi* du ſon *ut*, & ſa quinte *ſol*, forment entr'elles une tierce mineure *mi*, *ſol*; or *mi* eſt $\frac{5}{4}$, & *ſol* $\frac{3}{2}$, par ce qui vient d'être démontré : d'où il s'enſuit que la tierce mineure, ou l'intervalle de *mi* à *ſol*, ſera exprimé par le rapport de la fraction $\frac{5}{4}$, à la fraction $\frac{3}{2}$.

Pour déterminer ce rapport, il faut remarquer que $\frac{5}{4}$ eſt la même choſe que $\frac{10}{8}$; & que $\frac{3}{2}$ eſt la même choſe que $\frac{12}{8}$; de ſorte que $\frac{5}{4}$ ſera à $\frac{3}{2}$ dans le même rapport que $\frac{10}{8}$ à $\frac{12}{8}$, c'eſt-à-dire dans le même rapport que 10 à 12, ou que 5 à 6. Donc, ſi deux ſons forment entr'eux une tierce mineure, & que le premier ſoit repréſenté par cinq, le ſecond le ſera par 6; ou, ce

octave

THÉORIQUE ET PRATIQUE. 17

octave en montant ou en deſcendant. Ces deux ſons ſe confondent preſque entiérement

I. PART. *Chap. I.*

qui eſt la même choſe, ſi le premier eſt repréſenté par 1, le ſecond le ſera par $\frac{6}{5}$.

Ainſi la tierce mineure *harmonique* qui ſe trouve dans la réſonnance même du corps ſonore entre les ſons *mi* & *ſol harmoniques* du ſon principal, peut être exprimée par la fraction $\frac{6}{5}$.

N. B. On voit par cet exemple, que pour comparer entr'eux deux ſons qui ſont exprimés par des fractions, il faut d'abord multiplier le haut de la fraction qui exprime le premier, par le bas de la fraction qui exprime le ſecond, ce qui donnera un premier nombre; comme ici le haut 5 de la fraction $\frac{5}{4}$, multiplié par le bas 2 de la fraction $\frac{3}{2}$, a donné 10. Enſuite on multipliera le haut de la ſeconde fraction par le bas de la premiere, ce qui donnera un ſecond nombre, comme ici 12 qui eſt le produit de 4 par 3; & le rapport de ces deux nombres (qui dans l'exemple précédent ſont 10 & 12) exprimera le rapport de ces ſons, ou, ce qui revient au même, l'intervalle qu'il y a de l'un à l'autre; de maniere que plus le rapport de ces ſons différera de l'unité, plus l'intervalle ſera grand.

Voilà comment on compare entr'eux deux ſons dont on connoît la valeur numérique. Voici maintenant comment on trouve l'expreſſion numérique d'un ſon, quand on fait le rapport qu'il doit avoir avec un autre ſon dont l'expreſſion numérique eſt donnée.

B