

10 Principales lois logiques

Dans ce qui suit, on ne répétera plus que l'on a affaire à des schémas de tautologies. On pourra s'exercer à vérifier que tous ces schémas correspondent à des tautologies.

- A. Propriétés des connecteurs.

Un premier ensemble de lois logiques découle directement des propriétés des connecteurs \sim , \wedge et \vee telles qu'elles se lisent sur leur table.

- idempotence :

$$\begin{aligned}(\varphi \wedge \varphi) &\Leftrightarrow \varphi \\(\varphi \vee \varphi) &\Leftrightarrow \varphi\end{aligned}$$

- commutativité :

$$\begin{aligned}(\varphi \wedge \psi) &\Leftrightarrow (\psi \wedge \varphi) \\(\varphi \vee \psi) &\Leftrightarrow (\psi \vee \varphi)\end{aligned}$$

- associativité :

$$\begin{aligned}[\varphi \wedge (\psi \wedge \theta)] &\Leftrightarrow [(\varphi \wedge \psi) \wedge \theta] \\[\varphi \vee (\psi \vee \theta)] &\Leftrightarrow [(\varphi \vee \psi) \vee \theta]\end{aligned}$$

- distributivité \wedge/\vee :

$$[\varphi \wedge (\psi \vee \theta)] \Leftrightarrow [(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)]$$

- distributivité \vee/\wedge :

$$[\varphi \vee (\psi \wedge \theta)] \Leftrightarrow [(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)]$$

- double négation :

$$\sim(\sim\varphi) \Leftrightarrow \varphi$$

B. Equivalence entre connecteurs.

\Rightarrow :

$$\begin{aligned}(\varphi \Rightarrow \psi) &\Leftrightarrow \sim(\varphi \wedge \sim\psi) \\ \sim(\varphi \Rightarrow \psi) &\Leftrightarrow (\varphi \wedge \sim\psi) \\ (\varphi \Rightarrow \psi) &\Leftrightarrow (\sim\varphi \vee \psi) \\ \sim(\varphi \Rightarrow \psi) &\Leftrightarrow \sim(\sim\varphi \vee \psi)\end{aligned}$$

\wedge :

$$\begin{aligned}(\varphi \wedge \psi) &\Leftrightarrow \sim(\varphi \Rightarrow \sim\psi) \\ \sim(\varphi \wedge \psi) &\Leftrightarrow (\varphi \Rightarrow \sim\psi) \\ (\varphi \wedge \psi) &\stackrel{dM}{\Leftrightarrow} \sim(\sim\varphi \vee \sim\psi) \\ \sim(\varphi \wedge \psi) &\stackrel{dM}{\Leftrightarrow} (\sim\varphi \vee \sim\psi)\end{aligned}$$

\vee :

$$\begin{aligned}(\varphi \vee \psi) &\Leftrightarrow \sim\varphi \Rightarrow \psi \\ \sim(\varphi \vee \psi) &\Leftrightarrow \sim(\sim\varphi \Rightarrow \psi) \\ (\varphi \vee \psi) &\stackrel{dM}{\Leftrightarrow} \sim(\sim\varphi \wedge \sim\psi) \\ \sim(\varphi \vee \psi) &\stackrel{dM}{\Leftrightarrow} (\sim\varphi \wedge \sim\psi)\end{aligned}$$