TD Logique n^{o} 6

1 Equivalences logiques 1

En appliquant des règles d'équivalences, montrez que ces formules sont équivalents.

1. $[(p \wedge q) \Rightarrow r]$ et $\neg(\neg(p \Rightarrow \neg q) \wedge \neg r)$

1. $[(p \wedge q) \Rightarrow r]$
2.$\neg[(p \wedge q) \wedge \neg r]$ (équivalence $\Rightarrow et \wedge$)
3.$\neg[(\neg(p \Rightarrow \neg q) \wedge \neg r]$ (équivalence $\wedge et \Rightarrow$)

2. $\neg(p \wedge q) \vee (q \Rightarrow r)$ et $(\neg p \vee \neg q) \vee (q \Rightarrow r)$

1. $\neg(p \wedge q) \vee (q \Rightarrow r)$
2. $(\neg p \vee \neg q) \vee (q \Rightarrow r)$ (De morgan)

3. $(p \Rightarrow r) \Rightarrow \neg(r \vee q)$ et $\neg(\neg(p \wedge \neg r) \wedge \neg(\neg r \wedge \neg q)$

1. $(p \Rightarrow r) \Rightarrow \neg(r \vee q)$
2. $\neg(p \wedge \neg r) \Rightarrow (\neg r \wedge \neg q)$ (équivalence $\Rightarrow et \wedge$)
3. $(p \wedge \neg r) \vee (\neg r \wedge \neg q)$ (équivalence $\Rightarrow et \vee$)
4.$\neg(\neg(p \wedge \neg r) \wedge \neg(\neg r \wedge \neg q)$ (De morgan)

2 Equivalences logiques 2

Réécrivez ces formules en n'utilisant que $\neg$ et $\Rightarrow$. Détaillez chaque étape.

1.$[(p \vee q) \Rightarrow (\neg r \vee s)$

1. $[(p \vee q) \Rightarrow (\neg r \vee s)$
2. $[(\neg\neg p \vee q) \Rightarrow (r \Rightarrow s)$ (équivalence $\vee et \Rightarrow$ et introduction de la double négation)
3.$[\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow s)$ (équivalence $\vee et \Rightarrow$)

2.$((p \Leftrightarrow q)$

$$1.\ ((p \Leftrightarrow q)$$
$$2.\ (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\ \text{(équivalence} \Leftrightarrow \text{et double} \Rightarrow)$$
$$3.\ \neg[(p \wedge q) \Rightarrow \neg(q \Rightarrow p)]\ \text{(équivalence} \wedge \text{et} \Rightarrow)$$
$$4.\neg[\neg(p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg(q \Rightarrow p)]\ \text{(idem)}$$

3.$\neg[\neg p \vee (q \wedge r)]$

$$1.\ \neg[\neg p \vee (q \wedge r)]$$
$$2.\neg[p \Rightarrow (q \wedge r)]\ \text{(équivalence} \wedge \text{et} \Rightarrow)$$
$$3.\ \neg[p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow \neg r)]\ \text{(idem)}$$

4.$\neg[(q \Leftrightarrow p) \wedge r]$

$$1.\ \neg[(q \Leftrightarrow p) \wedge r]$$
$$2.\ (q \Leftrightarrow p) \Rightarrow r\ \text{(équivalence} \wedge \text{et} \Rightarrow)$$
$$3.[(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \neg r\ \text{(équivalence} \Leftrightarrow \text{et double} \Rightarrow)$$
$$4.\neg[(q \Rightarrow p) \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q)] \Rightarrow \neg r\ \text{(équivalence} \wedge \text{et} \Rightarrow)$$

3 Forme normale disjonctive

Mettez ces formules en forme normale disjonctive. Que pouvez-vous en conclure ? S'agit-il d'une contradiction ?

1. $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \wedge p)$

$$1.\ (p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \wedge p)$$
$$2.\ (p \vee \neg q) \wedge (\neg q \wedge p)\ \text{(équivalence} \Rightarrow \text{et} \vee)$$
$$3.\ (p \wedge \neg q \wedge p) \vee (\neg q \wedge \neg q \wedge p)\ \text{(distribution)}$$
$$4.\ (p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge p)\ \text{(simplification)}$$
$$5.\ (p \wedge \neg q)\ \text{(simplification)}$$

2. $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \wedge q)$

$$1.\ (p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \wedge q)$$
$$2.\ (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)\ \text{(équivalence} \Rightarrow \text{et} \vee)$$
$$3.\ (p \wedge \neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p \wedge q)\ \text{(distribution)}$$

Contradiction

3. $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge [p \wedge \neg(q \Rightarrow r)]$

$$1.\ [(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge [p \wedge \neg(q \Rightarrow r)]$$
$$2.\ [\neg(p \wedge q) \vee r] \wedge [p \wedge p \wedge \neg r] \text{ (équivalence } \Rightarrow \text{ et } \vee \text{ et équivalence } \Rightarrow \text{ et } \wedge)$$
$$3.\ [\neg p \vee \neg q \vee r] \wedge [p \wedge p \wedge \neg r] \text{ (de morgan)}$$
$$4.\ [\neg p \wedge p \wedge p \wedge \neg r] \vee [\neg q \wedge p \wedge p \wedge \neg r] \vee [r \wedge p \wedge p \wedge \neg r] \text{ (distributivité)}$$

4 Forme normale conjonctive

Mettez ces formules en forme normale conjonctive. Que pouvez-vous en conclure ? S'agit-il d'une tautologie ?

1.$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

$$1.(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$
$$2.\neg(\Rightarrow q) \vee (\neg q \Rightarrow \neg p) \text{ (équivalence } \Rightarrow \text{ et } \vee)$$
$$3.(p \wedge \neg q) \vee (q \vee \neg p) \text{ (équivalence } \Rightarrow \text{ et } \wedge)$$
$$4.(q \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg p \vee p) \text{ (distribution)}$$

Tautologie

2.$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$

$$1.[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$$
$$2.\neg[((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge \neg((\neg p \vee r \wedge (\neg q \vee r))] \text{ (équivalence } \Rightarrow \text{ et } \wedge)$$
$$3.\ \neg[(p \wedge q) \Rightarrow r] \vee [(\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)] \text{ (de morgan)}$$
$$4.(p \wedge q \wedge \neg r) \vee [(\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)] \text{ (équivalence } \Rightarrow \text{ et } \wedge)$$
$$5.\ [(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee r)] \wedge [(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg q \vee r)] \text{ (distribution)}$$
$$6.\ (\neg p \vee r \vee r) \wedge (\neg p \vee r \vee q) \wedge (\neg p \vee r \vee p) \wedge (\neg q \vee r \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee r \vee q) \wedge (\neg q \vee r \vee p) \text{ (distribution)}$$
$$7.(\neg p \vee r \vee q) \wedge (\neg q \vee r \vee p) \text{ (simplification)}$$