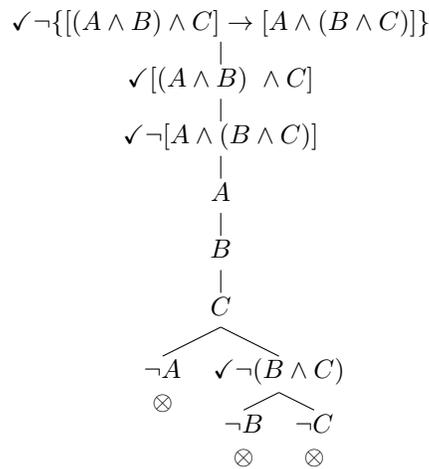


Toutes les branches de l'arbre ferment, la formule en haut de l'arbre est donc contradictoire, ce qui veut dire que la formule de départ (la formule à évaluer – sa négation) est tautologique, nécessairement vraie.

3.  $[(A \wedge B) \wedge C] \rightarrow [A \wedge (B \wedge C)]$



Toutes les branches de l'arbre ferment, la formule en haut de l'arbre est donc contradictoire, ce qui veut dire que la formule de départ (la formule à évaluer – sa négation) est tautologique, nécessairement vraie.

## 2 Exercices de déduction naturelle (7,5 pts)

### 2.1 (2,5 pts)

Vous démontrerez que l'on peut dériver  $\neg B \rightarrow C$  à partir des prémisses  $\neg C \rightarrow \neg A$  et  $\neg A \rightarrow B$ .

1	$\neg C \rightarrow \neg A$	P
2	$\neg A \rightarrow B$	P
3	$\neg B$	A
4	$\neg C$	A
5	$\neg C \rightarrow \neg A$	R1
6	$\neg A$	$\rightarrow$ E, 4, 5
7	$\neg A \rightarrow B$	R2
8	$B$	$\rightarrow$ E, 6, 7
9	$\neg B$	R3
10	$\neg\neg C$	$\neg$ I, 4-9
11	$C$	$\neg$ E, 10
12	$\neg B \rightarrow C$	$\rightarrow$ I, 4-10. CQFD

## 2.2 (2,5 pts)

Vous démontrerez que l'on peut dériver la formule  $\neg A \leftrightarrow B$  des prémisses suivantes :  $\neg(A \wedge B)$  et  $(A \vee B)$ .

1	$\neg(A \wedge B)$	P
2	$(A \vee B)$	P
3	$\neg A$	A
4	$A \vee B$	R2
5	$B$	$\vee$ E, 3, 4
6	$\neg A \rightarrow B$	$\rightarrow$ I, 3-5
7	$B$	A
8	$A$	A
9	$B$	R7
10	$(A \wedge B)$	$\wedge$ I, 8, 9
11	$\neg(A \wedge B)$	R1
12	$\neg A$	$\neg$ I, 8-11
13	$B \rightarrow \neg A$	$\rightarrow$ I, 7-12.
14	$\neg A \leftrightarrow B$	$\leftrightarrow$ I, 6, 13

### 2.3 (2,5 pts)

Vous démontrerez que l'on peut dériver la formule  $[(A \wedge B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$  sans prémisses.

1			$[(A \wedge B) \rightarrow C]$	A
2			$(A \rightarrow B)$	A
3				A
4				$(A \rightarrow B)$
5				$B$
6				$(A \wedge B)$
7				$(A \wedge B) \rightarrow C$
8				$C$
9				$(A \rightarrow C)$
10				$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$
11				$[(A \wedge B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$

### 3 Vérifonctionnalité (2 pts)

Qu'est-ce qu'un connecteur vérifonctionnel? *Question de cours.*

### 4 Forme normale conjonctive (3 pts)

Vous mettez la formule suivante en *forme normale conjonctive*. Que pouvez-vous en conclure?

$$[(A \wedge \neg B) \rightarrow C] \rightarrow [\neg C \rightarrow (\neg A \vee B)]$$

Mettons cette formule en FNC :

1.

$$\neg[(A \wedge \neg B) \rightarrow C] \vee [\neg C \rightarrow (\neg A \vee B)]$$

Équivalences entre connecteurs :  $(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\phi \vee \psi)$

2.

$$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (C \vee \neg A \vee B)$$

Équivalences :  $\neg(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\phi \wedge \neg\psi)$  et  $(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\phi \vee \psi)$  et  $\neg\neg\phi \equiv \phi$

3.

$$(\neg C \vee C \vee \neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C \vee \neg A \vee B) \wedge (A \vee C \vee \neg A \vee B)$$

Distributivité :  $(\phi \wedge \psi) \vee \theta \equiv (\psi \vee \theta) \wedge (\phi \vee \theta)$

On trouve dans chacun des conjoints une lettre de proposition et sa négation, ce qui veut dire que chacun des conjoints est tautologique, ce qui veut dire que la conjonction elle-même est tautologique (et que notre formule de départ, qui lui est équivalente, est tout aussi tautologique).