Algèbre de Boole

1 Notions fondamentales.

1.1 Définition d'une algèbre de Boole

Une algèbre de Boole est une structure algébrique $\mathcal{B} = \langle B, \vee, \wedge, ^*, 0, 1\rangle$, dont les opérations satisfont les 5 conditions suivantes :

B_1 commutativité : $x \vee y = y \vee x \; // \; x \wedge y = y \wedge x$
B_2 associativité : $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \; // \; x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
B_3 absorption : $(x \vee y) \wedge y = y \; // \; (x \wedge y) \vee y = y$
B_4 $x \vee x^* = 1 \; // \; x \wedge x^* = 0$
B_5 distributivité : $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ ou : $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ [1]

Remarque terminologique : on appelle "sup" l'opération notée "$\vee$" et "inf", l'opération notée "$\wedge$" ; x^* est dit être le complémentaire de x.

1.1.1 Quelques résultats immédiats et importants

1. On démontre que si l'on a une des deux lois de distributivité, on a l'autre. Supposons, par ex., la deuxième identité ; alors :

$$\begin{array}{rcll}
(x \vee y) \wedge (x \vee z) & = & [(x \wedge (x \vee z)] \vee [y \wedge (x \vee z)] & \text{distributivité } \wedge/\vee \text{ admise} \\
 & = & x \vee [y \wedge (x \vee z)] & \text{absorption dans le membre de gauche} \\
 & = & x \vee [(y \wedge x) \vee (y \wedge z)] & \text{distributivité } \wedge/\vee \text{ dans les crochets} \\
 & = & [x \vee (y \wedge x)] \vee (y \wedge z) & \text{associativité} \\
 & = & x \vee (y \wedge z) & \text{absorption dans le membre de gauche}
\end{array}$$

(6) $x \vee 0 = x$ et $x \wedge 1 = x$. En effet :
$x \vee 0 \overset{B_4}{=} x \vee (x \wedge x^*) \overset{B_3}{=} x$; même chose pour $x \wedge 1 = x$.

On en tire immédiatement :

(6') $1 \vee 0 = 1$ et $1 \wedge 0 = 0$ et donc, par B$_4$: $1^* = 0$ / $0^* = 1$

(7) Idempotence de "$\vee$" et "$\wedge$" ; en effet :
$x \vee x \overset{(6)}{=} (x \vee x) \wedge 1 \overset{B_4}{=} (x \vee x) \wedge (x \vee x^*) \overset{B_5}{=} x \vee (x \wedge x^*) \overset{B_4}{=} x \vee 0 \overset{(6)}{=} x$; même chose pour $x \wedge x = x$.

(8) $x \vee 1 = 1$ et $x \wedge 0 = 0$. En effet :
$x \vee 1 \overset{B_4}{=} x \vee (x \vee x^*) \overset{B_2}{=} (x \vee x) \vee x^* \overset{(7)}{=} x \vee x^* \overset{B_4}{=} 1$; même chose pour $x \wedge 0 = 0$

(9) Le complémentaire, x^*, de x est unique ; en effet :
Supposons que x ait deux complémentaires, x_1^* et x_2^*. Par B$_4$, cela implique : $x \vee x_1^* = x \vee x_2^* = 1$ et $x \wedge x_1^* = x \wedge x_2^* = 0$. On a alors :

$x_1^* \overset{(6)}{=} x_1^* \wedge 1 \overset{hyp.}{=} x_1^* \wedge (x \vee x_2^*) \overset{B_5}{=} (x_1^* \wedge x) \vee (x_1^* \wedge x_2^*) \overset{hyp.}{=} (x_2^* \wedge x) \vee (x_2^* \wedge x_1^*) \overset{B_5}{=} x_2^* \wedge (x \vee x_1^*) \overset{hyp.}{=} x_2^* \wedge 1 \overset{(6)}{=} x_2^*$.

(10) $x^{**} = x$. En effet (en se souvenant que, par df., $x^{**} \vee x^* = 1 = x^* \vee x$) :
$x^{**} \overset{(6)}{=} x^{**} \vee 0 \overset{B_4}{=} x^{**} \vee (x \wedge x^*) \overset{B_5}{=} (x^{**} \vee x) \wedge \underline{(x^{**} \vee x^*)} = (x^{**} \vee x) \wedge \underline{(x^* \vee x)} \overset{B_5}{=} x \vee (x^{**} \wedge x^*) \overset{B_4}{=} x \vee 0 \overset{(6)}{=} x$.

(11) De Morgan : (11a) $x \vee y = (x^* \wedge y^*)^*$ et (11b) $x \wedge y = (x^* \vee y^*)^*$

Pour (11a), on montre que $x^* \wedge y^*$ est le complémentaire de $x \vee y$. En effet :

- $(x \vee y) \vee (x^* \wedge y^*) \overset{B_5}{=} [(x \vee y) \vee x^*] \wedge [(x \vee y) \vee y^*] \overset{B_{1-2}}{=} [(x \vee x^*) \vee y] \wedge [(y \vee y^*) \vee x] \overset{B_4}{=} (1 \vee y) \wedge (1 \vee x) \overset{(8)}{=} 1 \wedge 1 = 1$.
- $(x \vee y) \wedge (x^* \wedge y^*) \overset{B_5}{=} [(x^* \wedge y^*) \wedge x] \vee [(x^* \wedge y^*) \wedge y] \overset{B_{1-2}}{=} [(x \wedge x^*) \wedge y^*] \vee [(y \wedge y^*) \wedge x^*] \overset{B_4}{=} (0 \wedge y^*) \vee (0 \wedge x^*) \overset{(8)}{=} 0 \vee 0 = 0$.

Même chose pour (11b) [2].

2. Ces lois, comme on sait, peuvent s'exprimer autrement, mais de manière équivalente, par ex. : $x^* \vee y^* = (x \wedge y)^*$ et $x^* \wedge y^* = (x \vee y)^*$

1.2 Ordre sur B

On définit l'ordre sur B par :
Df_1 : $x \leq y$ ssi $x \vee y = y$, ou ce qui revient au même : $x \leq y$ ssi $x \wedge y = x$.

Qu'il s'agisse d'une relation d'ordre partiel est clair :

- réflexivité : en vertu de l'idempotence, $x \vee x = x$ et donc $x \leq x$;
- transitivité : si $x \vee y = y$ et $y \vee z = z$ alors $(x \vee y) \vee z = z$; mais $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee z$. Donc $x \vee z = z$, d'où : $x \leq z$.
- antisymétrie : si $x \vee y = y$ et $y \vee x = x$ alors (commutativité !) $x = y \vee x = x \vee y = y$.

Il suit de cette définition de l'ordre sur B les deux résultats suivants, dual l'un de l'autre :

(12a) $x \vee y^* = 1$ ssi $y \leq x$
(12b) $x \wedge y^* = 0$ ssi $x \leq y$

Démonstration pour (12a) :

Dans le sens $\rightarrow$:
On admet $x \vee y^* = 1$; on a alors : $x \overset{(6)}{=} x \vee 0 \overset{B_4}{=} x \vee (y \wedge y^*) \overset{B_5}{=} (x \vee y) \wedge (x \vee y^*) \overset{hyp.}{=} (x \vee y) \wedge 1 \overset{(6)}{=} x \vee y$. On a donc $x = x \vee y$, d'où : $y \leq x$.

Dans le sens $\leftarrow$:
On admet $y \leq x$ d'où (Df_1) : $x \vee y = x$ et donc $x \vee y^* = (x \vee y) \vee y^* \overset{B_2}{=} x \vee (y \vee y^*) \overset{B_4}{=} x \vee 1 \overset{(8)}{=} 1$.

Même chose pour (12b).

Exemples :

- Soit A un ensemble et $\wp(A)$ l'ensemble des parties de A ; on appelle "algèbre de Boole de l'ensemble des parties", la structure : $\mathcal{B} = \langle \wp(A), \cup, \cap, \complement_A, A, \emptyset \rangle$ où les opérations $\cup, \cap, \complement_A$ sont les habituelles opérations ensemblistes : union, intersection, complémentation (relativement à A). On s'assure aisément qu'elles satisfont les conditions B_1 - B_3 et B_5 et que, pour tout sous-ensemble X de A, on a bien : $X \cup \complement_A(X) = A$ et $X \cap \complement_A(X) = \emptyset$. A et $\emptyset$ sont donc les maximum et minimum de cette algèbre.

On peut tout simplement définir ce genre d'algèbre par comme étant de la forme $\langle \wp(A), \subseteq \rangle$, l'inclusion ensembliste jouant le rôle de relation d'ordre sur $\wp(A)$.

- $\mathbf{2} = \langle \{0, 1\}, \leq \rangle$ avec "$\leq$" telle que : $0 \leq 0$, $0 \leq 1$ et $1 \leq 1$ est une algèbre de Boole ; on s'assure aisément que la relation ainsi définie permet de retrouver tous les résultats précédents. Toute algèbre de Boole ne comptant que deux éléments est *isomorphe* (cf. plus loin, p. 13) à l'algèbre **2**.

1.2.1 Définitions de quelques notions à propos des ensembles ordonnés

Si $\mathcal{B}$ est une algèbre de Boole, on vient de voir que l'on peut définir sur B une relation d'ordre (partiel). Il s'ensuit que l'on peut considérer que B est un ensemble partiellement ordonné. On définit ci-dessous quelques notions relatives aux ensembles partiellement ordonnés qui valent donc pour la base B d'une algèbre $\mathcal{B}$.

- Une relation d'ordre, définie sur un ensemble E, telle que pour toute paire d'éléments $x, y \in E$, soit $x \leq y$, soit $y \leq x$ (*dichotomie*), est une relation d'ordre *totale*.

- Une *chaîne* dans E, ensemble partiellement ordonné, est un sous-ensemble de E totalement ordonné par la relation d'ordre sur E.

- Une *limite supérieure*, ou *majorant* (resp. *limite inférieure*, ou *minorant*), d'un sous ensemble A d'un ensemble partiellement ordonné E, est un élément $e \in E$ tel que, pour tout $a \in A$, $a \leq e$ (resp. $e \leq a$).

– Si $s \in E$ (resp. $i \in E$) est la plus petite limite supérieure de A (resp. la plus grande limite inférieure de A), on appelle s le *supremum*, ou *borne supérieure*, de A (resp. l'*infimum* ou *borne inférieure* de A).
On note le supremum de A, s'il existe, "$\bigvee A$" et l'infimum de A, s'il existe, "$\bigwedge A$".

Remarques :
- Dans cette notation, pour toute paire d'éléments $x, y \in B$, ensemble de base d'une algèbre $\mathcal{B}$, $\bigvee\{x, y\}) = x \vee y$ et $\bigwedge\{x, y\} = x \wedge y$.
- Si un ensemble partiellement ordonné, E, a une limite supérieure (resp. inférieure), cela signifie qu'il existe un élément e dans E tel que tout élément de E est inférieur (resp. supérieur) à e ; cette limite est donc unique et on l'appelle le *maximum* (resp. *minimum*) de E.
- Comme on a montré que dans une algèbre de Boole, pour tout $x \in B$, $x \wedge 1 = x$, et $x \vee 0 = x$, cela signifie, par df., que pour tout $x \in B$, $x \leq 1$ et $0 \leq x$, donc 1 et 0 sont respectivement, maximum et minimum de B.

– dans un ensemble partiellement ordonné E, un élément est *maximal* s'il n'existe pas d'élément de E qui lui soit supérieur (relativement à la relation d'ordre sur E) [3].

3. Il est possible de "construire" la notion d'algèbre de Boole à partir de celle d'ensemble ordonné. On procède ainsi : on définit d'abord un *treillis* T comme étant un ensemble partiellement ordonnée dans lequel toute paire d'éléments de T à un infimum et un supremum dans T (autrement dit, pour tout $x, y \in T$, $x \wedge y \in T$ et $x \vee y \in T$) ; on en tire immédiatement que dans un treillis tout sous-ensemble fini a un infimum et un maximum. Définies comme étant l'infimum et le supremum des sous-ensembles de T comptant deux éléments, il est aisé de montrer que les deux opérations "$\wedge$" et "$\vee$" sont idempotentes et satisfont les conditions B_1. - B_3.

On définit maintenant un treillis *complémenté* comme étant un treillis ayant un maximum (noté "1") et un minimum (noté "0") et tel que, pour tout élément $x \in T$, il y a au moins un élément $y \in T$ tel que $x \wedge y = 0$ et $x \vee y = 1$. On appelle cet élément "y", un *complémentaire* de x et on le note "x^*". Dans un treillis complémenté un élément peut avoir plusieurs complémentaires.

Le complémentaire d'un élément $x \in T$ n'est unique que si l'on admet, en plus de B_1 - B_3, la condition B_5, à savoir la distributivité de $\vee/\wedge$ ou de $\wedge/\vee$. On définit alors une algèbre de Boole comme étant un treillis distributif complémenté.

1.3 Filtre et ultrafiltre

1.3.1 Filtre

Soit $\mathcal{B}$, une algèbre de Boole. Un *filtre* dans $\mathcal{B}$ est un sous ensemble non-vide F de B qui se conforme aux deux clauses suivantes :

-F_1 pour tout $x, y \in F$, $x \wedge y \in F$
-F_2 pour tout $x \in F$ et tout $y \in B$, si $x \leq y$ alors $y \in F$[4].

On définit par dualité, un idéal I par :
-I_1 pour tout $x, y \in I$, $x \vee y \in I$
-I_2 pour tout $x \in I$ et tout $y \in B$, si $y \leq x$ alors $y \in I$.

Un filtre F est dit "propre" ssi $0 \notin F$. De même un idéal I est dit propre ssi $1 \notin I$. Dorénavant, on admettra, sauf mention contraire, que filtres et idéaux sont propres.

Il suit immédiatement des clauses F_2 et I_2, que, dans une algèbre $\mathcal{B}$, quel que soit le filtre F, $1 \in F$ et, quel que soit l'idéal I, $0 \in I$.

$\mathbf{L}_1$ On montre que, F étant un filtre dans $\mathcal{B}$, l'ensemble $I = \{x^* \in B : x \in F\}$ est un idéal. En effet :

- soit $y, z \in F$ et donc $y^*, z^* \in I$; comme, par (11) (de Morgan), $y^* \vee z^* = (y \wedge z)^*$ et que, par F_1, $y \wedge z \in F$, $(y \wedge z)^* \in I$; donc $y^* \vee z^* \in I$.

- soit $y \in F$ (d'où $y^* \in I$), $z \in B$ et $z \leq y^*$. Comme $z \leq y^*$, $z \vee y^* = y^*$ et donc, par (11), $(z^* \wedge y)^* = y^*$, d'où $z^* \wedge y = y$ et donc $y \leq z^*$. Comme $y \in F$, par F_2, $z^* \in F$, d'où $z \in I$.

$\mathbf{L}_2$ On montre que pour tout élément x de B, l'ensemble $\{y \in B : x \leq y\}$ est un filtre (l'ensemble $\{y \in B : y \leq x\}$ est un idéal). En effet :

4. Ces deux clauses se ramènent à : pour tout élément $x, y \in B$, $x \wedge y \in F$ ssi $x \in F$ et $y \in F$. Même remarque pour la définition d'un idéal. On remarque également que la clause F_2, se ramène à : pour tout $x \in F$ et tout $y \in B$, $x \vee y \in F$. Même chose pour I_2 ci-après.

- si $z, t \in \{y \in B : x \leq y\}$ alors $x \leq z$ et $x \leq t$, d'où : $x \wedge z = x$ et $x \wedge t = x$ et donc : $x = x \wedge x = (x \wedge z) \wedge (x \wedge t) = (x \wedge x) \wedge (z \wedge t) = x \wedge (z \wedge t)$. Donc $x \leq (z \wedge t)$ d'où : $z \wedge t \in \{y \in B : x \leq y\}$.

- si $z \in \{y \in B : x \leq y\}$ alors $x \leq z$; ainsi, quel que soit $t \in B$, si $z \leq t$, par transitivité, $x \leq t$ et donc $t \in \{y \in B : x \leq y\}$ [5].

Ensembles d'intersection finie.

Soit une algèbre $\mathcal{B}$ et A en ensemble d'éléments de B. On dit que A est "d'intersection finie" ssi tous ses sous-ensembles *finis* ont un *infimum* $\neq 0$.

L'intérêt de cette notion est qu'un sous-ensemble $A \subseteq B$ peut être étendu à un filtre (propre) ssi il est d'intersection finie. On procède comme suit.

On définit tout d'abord, relativement à un sous-ensemble $A \subseteq B$, l'ensemble A^i des infimum de tous les sous-ensembles finis de A. Autrement dit :

$$A^i = \{\bigwedge X : X \subseteq A \text{ et } X \text{ est fini}\}$$

On définit ensuite, toujours relativement à un sous-ensemble $A \subseteq B$, l'ensemble A^s de tous les éléments de B plus grands qu'un quelconque élément de A. Autrement dit :

$$A^s = \{x \in B : \exists y \in A \text{ et } y \leq x\}$$

On peut alors former, toujours relativement à un sous-ensemble $A \subseteq B$, l'ensemble $(A^i)^s$, ce qui peut se comprendre intuitivement par : on part de A, on ajoute les infimums de chaque sous-ensemble fini de A puis tous les éléments de B plus grands que les éléments de l'ensemble ainsi obtenu.

On note que puisque $\bigwedge\{x\} = x$ quel que soit $x \in A$, $A \subseteq A^i$. De la même manière, puisque "$\leq$" est réflexive, $A^i \subseteq (A^i)^s$; et donc $A \subseteq A^i \subseteq (A^i)^s$.

5. On peut remarquer que si F est une filtre dans une algèbre $\mathcal{B}$ et que $x^* \vee y \in F$ et $x \in F$, alors $y \in F$. En effet : dans ces conditions, $x \wedge (x^* \vee y) = (x \wedge x^*) \vee (x \wedge y) = x \wedge y \in F$; or $x \wedge y \leq y$ et donc $y \in F$. Cela a un goût de *Modus Ponens*...

Th$_1$ On montre alors que quel que soit $A \subseteq B$, $(A^i)^s$ est un filtre (pas nécessairement propre) ; et $(A^i)^s$ est un filtre propre ssi A est d'intersection finie.

1. $(A^i)^s$ est un filtre.

a. A démontrer : pour tout $x, y \in (A^i)^s$, $x \wedge y \in (A^i)^s$. En effet :

Si $x, y \in (A^i)^s$, alors il existe deux sous-ensembles finis de A, X et Y, avec $\bigwedge X \leq x$ et $\bigwedge Y \leq y$ et donc $\underline{\bigwedge X \wedge \bigwedge Y \leq x \wedge y}$[6].

On montre que $\bigwedge X \wedge \bigwedge Y \in (A^i)^s$; en effet : $X \cup Y$ est fini et est un sous-ensemble de A et donc $\bigwedge(X \cup Y) \in (A^i)^s$; comme (à démontrer éventuellement) $\bigwedge(X \cup Y) = \bigwedge X \wedge \bigwedge Y$, $\underline{\bigwedge X \wedge \bigwedge Y \in (A^i)^s}$.

Donc, puisque, $\bigwedge X \wedge \bigwedge Y \leq x \wedge y$, $x \wedge y \in (A^i)^s$ par df. de $(A^i)^s$.

b. Par définition de la composante "^{s}" de $(A^i)^s$ si $x \in A$, alors pour tout $y \in B$, si $x \leq y$ alors $y \in (A^i)^s$.

$(A^i)^s$ est donc un filtre. On montre maintenant que c'est un filtre propre ssi A est d'intersection finie. En effet :

Si A n'est pas d'intersection finie alors il existe un sous-ensemble fini $X \subseteq A$ tel que $\bigwedge X = 0$ et donc (par construction de $(A^i)^s$) $0 \in (A^i)^s$. D'un autre côté, si $(A^i)^s$ n'est pas un filtre propre, alors il existe $X \subseteq A$ tel que $\bigwedge X = 0$; A n'est donc pas d'intersection finie.

Comme $A \subseteq (A^i)^s$, on en conclut que $A \subseteq B$ est d'intersection finie ssi A peut être étendu à un filtre propre.

On démontre enfin que $(A^i)^s$ est le plus petit filtre propre dans lequel A est inclus. En effet :

Soit F un filtre quelconque et $A \subseteq F$. On montre : $(A^i)^s \subseteq F$. Soit $x \in (A^i)^s$; alors pour un $X \subseteq A$, $\bigwedge X \leq x$ et puisque F est un filtre et que $X \subseteq F$ (puisque $X \subseteq A \subseteq F$), $\bigwedge X \in F$; et comme $\bigwedge X \leq x$, $x \in F$. x étant quelconque, il en

6. On montre facilement que si $z \leq x$ (i.e. $z \wedge x = z$) et $t \leq y$ (i.e. $t \wedge y = t$) alors $z \wedge t \leq x \wedge y$. En effet : $(z \wedge t) \wedge (x \wedge y) = (z \wedge x) \wedge (t \wedge y) = z \wedge t$. Donc $z \wedge t \leq x \wedge y$. Même chose pour le dual.

résulte : $(A^i)^s \subseteq F$.

Définitions :

- Si F est une filtre et que $F = A^s$ pour un $A \subseteq B$, on dit que A est une *base* pour F.
- Si F est un filtre et que, pour un $A \subseteq B$, A^i est une base pour F, on dit que A est une *sous-base* de F et que A *engendre* F (qui est alors $= (A^i)^s$).
-

1.3.2 Ultrafiltre

Un *ultrafiltre* uF est un filtre qui ne peut être étendu, autrement dit : il n'existe pas de filtre propre G tel que $uF \subseteq G$.

Th$_2$: si uF est un filtre, alors uF est un ultrafiltre (propre) ssi pour tout $x \in B$, soit $x \in uF$, soit $x^* \in uF$, mais pas les deux.

Il est clair que si x et x^* appartiennent à uF, alors $x \wedge x^* = 0 \in uF$ et donc uF n'est pas propre.

Dans le sens $\rightarrow$:

Supposons $x \in B$ et $x \notin uF$, ultrafiltre propre. On montre qu'alors $x^* \in uF$.

Soit G le filtre *engendré* par $uF \cup \{x\}$ (autrement dit $G = [(uF \cup \{x\})^i]^s$) . G n'est donc pas propre puisque F est un ultrafiltre. En vertu du théorème précédent, $uF \cup \{x\}$ n'est donc pas d'intersection finie et il existe un $X \subseteq uF$, fini, tel que $\bigwedge X \wedge x = 0$, d'où (par (12b)), $\bigwedge X \leq x^*$ et comme $\bigwedge X \in uF$, $x^* \in uF$.

Dans le sens $\leftarrow$:

Supposons que pour tout $x \in B$, soit $x \in uF$, soit $x^* \in uF$. Soit G un filtre dans lequel uF soit strictement inclus. Il existe donc un y qui appartient à G mais pas uF ; d'où : $y^* \in F$. Comme $F \subset G$, $y^* \in G$ et donc $y, y^* \in G$ et G n'est pas propre.

Il résulte du résultat précédent qu'un ultrafiltre uF dans une algèbre $\mathcal{B}$ "coupe en deux" l'ensemble B ; autrement dit : il existe un bijection f entre uF et son complémentaire relativement à B que l'on peut définir ainsi : pour tout $x \in uF$, $f(x) = x^*$.

On vérifie aisément que le complémentaire d'un ultrafiltre est un ultra-idéal, ce dernier étant défini comme un idéal qui n'est inclus dans aucun idéal propre.

Th$_3$: théorème de l'ultrafiltre : **tout filtre peut être étendu à un ultrafiltre.**

On démontre ce théorème en utilisant un équivalent de l'axiome du choix, connu sous le nom de *lemme de Zorn* qui s'énonce :

Un ensemble partiellement ordonné A dont toutes les *chaînes* ont une *limite supérieure*, contient un élément maximal.

Démonstration du théorème de l'ultrafiltre.

Soit F un filtre (propre) dans une algèbre de Boole $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$ l'ensemble des filtres (propres) dans lesquels F est inclus. $\mathcal{F}$ est non-vide (puisque $F \in \mathcal{F}$) et peut être ordonné partiellement par l'inclusion ensembliste. On montre que toutes les chaînes de $\mathcal{F}$ (pour l'inclusion) ont une limite supérieure.

Soit $\mathcal{C} = \{C_i : i \in I\}$ une chaîne quelconque de $\mathcal{F}$ et on fait : $C = \bigcup C_{i \in I}$. On montre que C est une limite supérieure de $\mathcal{C}$ et est un filtre propre.

1. Il est clair que pour tout C_i ($i \in I$), on a $C_i \subseteq C$ et donc, pour tout C_i, $C_i \leq C$. Par ailleurs, $F \subseteq C$ et donc $C \in \mathcal{F}$. C est donc une limite supérieure de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{F}$.

2. C est un filtre propre ; en effet :
   -a pour tout $x, y \in C$, $x \wedge y \in C$:
   soit $x, y \in C$ et C_j et C_k $(j, k \in I)$ tels que $x \in C_j$ et $y \in C_k$. Comme $\mathcal{C}$ est une chaîne, on a soit $C_j \subseteq C_k$, soit $C_k \subseteq C_j$. Supposons $C_j \subseteq C_k$ (même chose dans l'autre cas) et donc $x, y \in C_k$. Comme C_k est un filtre, $x \wedge y \in C_k$ et donc, puisque $C_k \subseteq C$, $x \wedge y \in C$.

-b pour tout $x \in C$ et tout $y \in B$, si $x \leq y$ alors $y \in C$:
si $x \in C$, alors il existe $C_i \subseteq C$ $(i \in I)$ tel que $x \in C_i$. Comme C_i est un filtre dans $\mathcal{B}$, pour tout $y \in B$, si $x \leq y$, alors $y \in C_i$ et donc $y \in C$.

C est donc un filtre.

-c comme, pour tout $i \in I$, $0 \notin C_i$, $0 \notin C$. C est donc un filtre propre.

Par le lemme de Zorn, on en tire que $\mathcal{F}$ contient un élément (filtre) maximal, disons uG, qui est une extension de F et est donc un ultrafiltre.

Si l'on conjoint $\mathbf{Th}_1$ et $\mathbf{Th}_3$ on a le corollaire suivant :

$\mathbf{C}_4$: dans une algèbre de Boole $\mathcal{B}$, tout sous-ensemble d'intersection finie de B peut être étendu à un ultrafiltre.

$\mathbf{C}_5$: dans une algèbre de Boole $\mathcal{B}$, tout élément $x \in B$ tel que $x \neq 0$ appartient à un ultrafiltre.

En effet : si $x \neq 0$, alors $\{x\}$ est d'intersection finie et peut être étendu à un ultrafiltre ; clairement x appartient à cet ultrafiltre.

$\mathbf{C}_6$: si x et y sont deux éléments distincts d'une algèbre de Boole, il y a un ultrafiltre contenant l'un mais pas l'autre.

En effet : soit $x \neq y$. Alors soit $x \nleq y$, soit $y \nleq x$. Supposons $x \nleq y$ (même chose dans l'autre cas). En vertu de (12b), $x \wedge y^* \neq 0$ et donc $\{x, y^*\}$ est d'intersection finie et peut être étendu à un ultrafiltre uF. Et comme $y^* \in uF$, par $\mathbf{Th}_2$, $y \notin F$.

2 Homomorphisme ; homomorphisme canonique.

2.1 Sous-algèbre d'une algèbre de Boole

.

Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de Boole et B' un sous-ensemble de B, non-vide et fermé pour les opérations $\vee, \wedge$ et * (i.e. pour tout $x, y \in B'$, $x \vee y \in B'$, $x \wedge y \in B'$ et $x^* \in B'$). Si tel est le cas, on vérifie aisément que $1, 0 \in B'$.

On dit alors que $\mathcal{B}' = \langle B', \vee, \wedge, {}^*, 0, 1\rangle$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{B}$ ou que $\mathcal{B}$ est une *extension* de $\mathcal{B}'$, ce que l'on note $\mathcal{B}' \sqsubseteq \mathcal{B}$.

On remarque tout de suite que toute sous-algèbre $\mathcal{B}'$ d'une algèbre $\mathcal{B}$ contient le 0 et le 1 de $\mathcal{B}$ et, plus particulièrement, que $\mathcal{B}' = \langle \{0,1\}, \vee, \wedge, {}^*, 0, 1\rangle$ est une sous-algèbre de $\mathcal{B}$.

Th$_7$: Soit F un filtre dans $\mathcal{B}$ et $I = \{x^* \in B : x \in F\}$. On a déjà vu que I est un idéal. On montre que $F \cup I = B'$ est l'ensemble de base d'une sous-algèbre $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{B}$. En effet :

- $0 \in I$, donc $0 \in B'$; $1 \in F$, donc $1 \in B'$.

- si $x, y \in B'$, on montre que $x \vee y \in B'$; trois cas à considérer :
  - $x, y \in F$; $x \vee y \geq x$ (ou $\geq y$) donc, puisque F est une filtre, : $x \vee y \in F$ et donc : $x \vee y \in B'$
  - $x, y \in I$; $x \vee y \in I$ puisque I est un idéal, et donc $x \vee y \in B'$.
  - $x \in F$ et $y \in I$; comme $x \vee y \geq x$ et $x \in F$, $x \vee y \in F$ et donc : $x \vee y \in B'$

  Même genre de chose pour $x \wedge y$.

- si $x \in B'$ alors, si $x \in F$, $x^* \in I$ et si $x \in I$, $x^* \in F$. Ainsi $x^* \in I$ ou $x^* \in F$, donc $x^* \in B'$.

De plus, il est facile de voir que F est un ultrafiltre et I un ultra-idéal dans $\mathcal{B}'$

2.2 Homomorphisme entre algèbres de Boole.

Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux algèbres de Boole et soit une fonction $h : B_1 \to B_2$. h est un *homomorphisme* de $\mathcal{B}_1$ dans $\mathcal{B}_2$ ssi pour tout $x, y \in B_1$, on a :

(a) $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$
(b) $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$
(c) $h(x^*) = h(x)^*$

Autrement dit h "préserve les opérations" : on arrive au même élément de B_2, soit que l'on prenne le sup (l'inf) de deux éléments de B_1 et qu'on l'envoie par h sur son image dans B_2, soit qu'on envoie les deux éléments sur leur image par h dans B_2

et que l'on prenne leur sup (inf) dans B_2 ; etc [7].

On note $h[B_1]$ l'ensemble des images par h (dans B_2), des éléments de B_1 ; autrement dit : $h[B_1] = \{y \in B_2 : \text{il existe } x \in B_1 \text{ et } y = h(x)\}$; si $X \subseteq B_1$, $h[X] = \{y \in B_2 : \text{il existe } x \in X \text{ et } y = h(x)\}$.

On a les théorèmes suivants :
Th$_8$ pour tout $x, y \in B_1$, si $x \leq y$ alors $h(x) \leq h(y)$ (à démontrer !).

Th$_9$ $h(0_{B_1}) = 0_{B_2}$ et $h(1_{B_1}) = 1_{B_2}$ (à démontrer !).

Th$_{10}$ $h[B_1] \sqsubseteq \mathcal{B}_2$. En effet :

- Soit $x', y' \in h[B_1]$. Il existe donc deux éléments $x, y, \in B_1$ tels que $x' = h(x)$ et $y' = h(y)$ et donc $x' \wedge y' = h(x) \wedge h(y)$. Comme h est un homomorphisme, $h(x) \wedge h(y) = h(x \wedge y) \in h[B_1]$. Donc $x' \wedge y' \in h[B_1]$. Même chose pour $x' \vee y'$.

- Soit $x' \in h[B_1]$. Il existe donc un élément $x \in B_1$ tels que $x' = h(x)$ et donc $x'^* = h(x)^*$. Comme h est un homomorphisme, $h(x)^* = h(x^*) \in h[B_1]$. Donc $x'^* \in h[B_1]$.

$h : B_1 \rightarrow B_2$ est un *isomorphisme* entre $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ si h est un homomorphisme bijectif (i.e. injectif et surjectif).

Lorsqu'il y a un isomorphisme entre deux algèbres, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, on dit que $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont *isomorphes*, ce que l'on note : $\mathcal{B}_1 \cong \mathcal{B}_2$. Deux algèbres isomorphes sont quasiment indiscernables au sens où tout ce qui vaut de l'une, vaut de l'autre, et réciproquement, *via* l'isomorphisme. C'est ainsi, par ex., que l'on a le petit lemme suivant :

L$_{11}$ Soit $h : B_1 \rightarrow B_2$, isomorphisme entre $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Si F est un filtre dans $\mathcal{B}$, alors $h[F]$ est un filtre dans $\mathcal{B}_2$; même chose pour un idéal I. En effet :

- Soit $x', y' \in h[F]$. Il existe donc deux éléments $x, y, \in F$ tels que $x' = h(x)$ et $y' = h(y)$ et donc $x' \wedge y' = h(x) \wedge h(y)$. Comme h est un homomorphisme,

7. Si l'on exprime les opérations $\vee$, $\wedge$ et * sous forme de relation, la définition de l'homomorphisme ici donnée correspond à la définition de l'homomorphisme **fort** dans la présentation de l'algèbre abstraite introduisant à la théorie des modèles en premier ordre.

$h(x) \wedge h(y) = h(x \wedge y)$ et puisque F est un filtre, $x \wedge y \in F$. Donc $x' \wedge y' \in h[F]$.

- Soit $x' \in h[F]$ et $y' \in B_2$ tels que $x' \leq y'$. Il existe donc un élément $x \in F$ tel que $x' = h(x)$ et, puisque h est surjectif, un élément $y \in B_1$ tel que $y' = h(y)$; donc $h(x) \leq h(y)$ et par $\mathbf{Df}_1$, $h(x) \wedge h(y) = h(x)$. h étant un homomorphisme, $h(x) \wedge h(y) = h(x \wedge y)$ et donc $h(x \wedge y) = h(x)$. Comme h est injectif, il en résulte, $x \wedge y = x$ et donc $x \leq y$. Or F est un filtre, d'où, puisque $x \in F$, $y \in F$ et donc $h(y) \in h[F]$.

Il est clair que si $h : B_1 \to B_2$, est un homomorphisme *injectif* entre $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, h est un isomorphisme entre $\mathcal{B}_1$ et $h[B_1]$.

2.3 Algèbre quotient et homomorphisme canonique.

2.3.1 Relation d'équivalence dans $\mathcal{B}$

Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de Boole, et F un filtre dans $\mathcal{B}$. On définit une relation sur B par : $x \sim_F y$ ssi il existe $f \in F$ tel que $x \wedge f = y \wedge f$.

Il est clair que $\sim_F$ est une relation d'équivalence :

– réflexive : pour tout $f \in F$, $x \wedge f = x \wedge f$ et donc $x \sim_F x$ (!!).

– symétrique (tout aussi trivial!!) : s'il existe $f \in F$ tel que $x \wedge f = y \wedge f$, alors il existe $f \in F$ tel que $y \wedge f = x \wedge f$ et donc : si $x \sim_F y$ alors $y \sim_F x$.

– transitive : on admet qu'il existe $f \in F$ tel que $x \wedge f = y \wedge f$ et $f' \in F$ tel que $y \wedge f' = z \wedge f'$. $f \wedge f' \in F$ et on a :
$x \wedge (f \wedge f') = (x \wedge f) \wedge f' = (y \wedge f) \wedge f' = (y \wedge f') \wedge f = (z \wedge f') \wedge f = z \wedge (f' \wedge f)$.
Donc, $x \sim_F z$

$\mathbf{Th}_{12}$: $\sim_F$ est une *congruence* sur B, i.e. si $x \sim_F x'$ et $y \sim_F y'$, on a :

$$x \wedge y \sim_F x' \wedge y'$$
$$x \vee y \sim_F x' \vee y'$$

$$x^* \sim_F x'^*$$

Pour les deux premières équivalences, on a :
soit $f, f' \in F$ tel que $x \wedge f = x' \wedge f$ et $y \wedge f' = y' \wedge f'$. On a donc :

$(x \wedge f) \wedge (y \wedge f') = (x' \wedge f) \wedge (y' \wedge f')$ et donc en réorganisant :
$(x \wedge y) \wedge (f \wedge f') = (x' \wedge y') \wedge (f \wedge f')$

D'où : $x \wedge y \sim_F x' \wedge y'$, puisque $f \wedge f' \in F$.

De manière proche (en utilisant la distributivité et en réorganisant)) :

$$\begin{aligned}
(x \vee y) \wedge (f \wedge f') &= [x \wedge (f \wedge f')] \vee [y \wedge (f \wedge f')] \\
&= [(x \wedge f) \wedge f'] \vee [(y \wedge f') \wedge f] \\
&= [(x' \wedge f) \wedge f'] \vee [(y' \wedge f') \wedge f] \\
&= [x' \wedge (f \wedge f')] \vee [y' \wedge (f \wedge f')] \\
&= (x' \vee y') \wedge (f \wedge f').
\end{aligned}$$

D'où : $x \vee y \sim_F x' \vee y'$, puisque $f \wedge f' \in F$.

Pour la troisième équivalence :

On a d'abord :
$f = f \wedge (x' \vee x'^*) = (f \wedge x') \vee (f \wedge x'^*) = (f \wedge x) \vee (f \wedge x'^*)$, et donc :

$\underline{x^* \wedge f} = x^* \wedge [(f \wedge x) \vee (f \wedge x'^*)] = (x^* \wedge f \wedge x) \vee (x^* \wedge f \wedge x'^*) = \underline{(x'^* \wedge x^*) \wedge f}$

Puis :
$f = f \wedge (x \vee x^*) = (f \wedge x) \vee (f \wedge x^*) = (f \wedge x') \vee (f \wedge x^*)$, et donc :

$\underline{x'^* \wedge f} = x'^* \wedge [(f \wedge x') \vee (f \wedge x^*)] = (x'^* \wedge f \wedge x') \vee (x'^* \wedge f \wedge x^*) = \underline{(x'^* \wedge x^*) \wedge f}.$

Il en résulte que $x^* \wedge f = x'^* \wedge f$ et donc $x^* \sim_F x'^*$.

Cela revient à dire que les classes d'équivalence pour $\sim_F$ se comportent, à une équivalence près, comme leurs éléments, autrement dit l'inf et le sup de deux éléments quelconques de B est $\sim_F$-équivalent à l'inf et au sup de deux éléments respectivement

$\sim_F$-équivalents aux deux premiers ; même chose pour le complémentaire.

On démontre maintenant deux petits lemmes qui seront utilisés dans la démonstration du $\mathbf{Th}_{15}$.

$\mathbf{L}_{13a}$: $x \sim_F y$ ssi $(x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y) \in F$ et
$\mathbf{L}_{13b}$: $(x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y) = 1$ ssi $x = y$

Dans la démonstration du $\mathbf{Th}_{15}$, on abrègera $(x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y)$ par $x \odot y$.

13a₁. Dans le sens $\rightarrow$: si $x \sim_F y$ alors $(x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y) \in F$

Si $x \sim_F y$, alors il existe $f \in F$ tel que : $x \wedge f = y \wedge f$. On a donc :
$x = x \vee (x \wedge f) = x \vee (y \wedge f)$ et
$y = y \vee (y \wedge f) = y \vee (x \wedge f)$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\underline{x \vee y^*} &= [x \vee (y \wedge f)] \vee y^* \\
&= x \vee [(y \wedge f) \vee y^*] \\
&= x \vee [(y \vee y^*) \wedge (f \vee y^*)] \\
&= x \vee [1 \wedge (f \vee y^*)] \\
&= x \vee (f \vee y^*) \\
&= \underline{f \vee (x \vee y^*)}.
\end{aligned}$$

Or $f \in F$ et $f \leq f \vee (x \vee y^*)$ et donc par le résultat précédent : $f \leq x \vee y^*$; donc, par F_2, $\boxed{x \vee y^* \in F}$.

De la même manière :

$$\begin{aligned}
\underline{x^* \vee y} &= x^* \vee [y \vee (x \wedge f)] \\
&= [x^* \vee (x \wedge f)] \vee y \\
&= [(x^* \vee x) \wedge (x^* \vee f)] \vee y \\
&= [1 \wedge (x^* \vee f)] \vee y \\
&= (x^* \vee f) \vee y \\
&= \underline{f \vee (x^* \vee y)}.
\end{aligned}$$

Donc, pour la même raison que précédemment : $\boxed{x^* \vee y \in F}$

Il en résulte, par F_1 : $(x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y) \in F$, cqfd.

13a₂. Dans le sens $\leftarrow$: si $(x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y) \in F$, alors $x \sim_F y$.

Il faut démontrer que si $(x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y) \in F$, alors il existe $f \in F$ tel que : $x \wedge f = y \wedge f$. On montre que l'élément $(x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y)$ est précisément cet $f \in F$. En effet :

$$\begin{aligned}
x \wedge [(x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y)] &= (x \vee y^*) \wedge [x \wedge (x^* \vee y)] \\
&= (x \vee y^*) \wedge [(x \wedge x^*) \vee (x \wedge y)] \\
&= (x \vee y^*) \wedge [0 \vee (x \wedge y)] \\
&= (x \vee y^*) \wedge (x \wedge y) \\
&= [(x \vee y^*) \wedge y] \wedge x \\
&= [(y \wedge x) \vee (y \wedge y^*)] \wedge x \\
&= [(y \wedge x) \vee 0] \wedge x \\
&= y \wedge x \wedge x \\
&= x \wedge y
\end{aligned}$$

On s'assure de la même manière que $y \wedge [(x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y)] = x \wedge y$ et que l'on a donc bien :

$$x \wedge [(x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y)] = y \wedge [(x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y)].$$

Comme par hypothèse $(x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y) \in F$, $(x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y)$ est le $f \in F$ recherché ; donc $x \sim_F y$, cqfd.

13b₁. Dans le sens $\rightarrow$: si $(x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y) = 1$, alors $x = y$.
Si $(x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y) = 1$, alors $x \vee y^* = 1$ et $x^* \vee y = 1$; donc $y \leq x$ et $x \leq y$, d'où : $x = y$.

13b₂. Dans le sens $\leftarrow$: si $x = y$, alors $(x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y) = 1$.
Trivial : si $x = y$, alors $(x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y) = (x \vee x^*) \wedge (x^* \vee x) = 1 \wedge 1 = 1$.

2.3.2 L'algèbre quotient pour $\sim_F$.

Soit $|x|$ la classe d'équivalence de $x \in B$ pour "$\sim_F$" (en sous-entendant le filtre F auquel $\sim_F$ est relatif) On note B/F l'ensemble quotient correspondant à "$\sim_F$," i.e. $B/F = \{|x| : x \in B\}$. [8].

On peut alors prendre B/F comme l'ensemble de base d'une algèbre de Boole, $\mathcal{B}/F$, en exploitant le faut que $\sim_F$ est une congruence, ce qui permet de donner les définitions suivantes :

pour tout $x, y \in B$:

$$\begin{gathered} |x| \vee |y| = |x \vee y| \\ |x| \wedge |y| = |x \wedge y| \\ |x|^* = |x^*| \end{gathered}$$

Il en résulte que $h : B \to B/F$, défini par $h(x) = |x|$ est un homomorphisme. En effet :

$$\begin{gathered} h(x \vee y) = |x \vee y| = |x| \vee |y| = h(x) \vee h(y) \\ h(x \wedge y) = |x \wedge y| = |x| \wedge |y| = h(x) \wedge h(y) \\ h(x^*) = |x^*| = |x|^* = h(x)^* \end{gathered}$$

On démontre maintenant l'important théorème suivant :

Th$_{14}$: $|x| = 1_{B/F}$ ssi $x \in F$ ($1_{B/F}$ est le 1 de B/F).

1. On montre d'abord : $x \in F$ ssi $|x| = F$.

   a. Dans le sens $\to$: si $x \in F$ alors $|x| = F$.

      a$_1$ Etant admis que $x \in F$, on montre : $F \subseteq |x|$, i.e. : pour tout $y \in B$, si $y \in F$ alors $x \sim_F y$ et donc $y \in |x|$. En effet :

8. Rappel : soit une relation d'équivalence, disons $\simeq$, définie sur un ensemble A, et un élément $z \in A$. La classe d'équivalence, $|z|$, de z pour $\simeq$ est l'ensemble des éléments de A qui entretiennent cette relation avec z, autrement dit : $|z| = \{x \in A : z \simeq x\}$. Du fait que $\simeq$ est une relation d'équivalence, il s'en ensuit que, quel que soit $x, y \in |z|$, $x \simeq y$ et que, quel que soit $x \in |z|$ et $y \notin |z|$, on n'a pas : $x \simeq y$. Il en résulte également : $x \simeq y$ ssi $|x| = |y|$. On montre facilement, à partir de là, que deux classes d'équivalence quelconques sont disjointes et que l'union de toutes les classes d'équivalence est égale à A ; autrement dit, tout élément de A appartient à une, et une seule, classe d'équivalence pour $\simeq$. L'ensemble quotient de A pour $\simeq$ ($A/\simeq$) est l'ensemble des classes d'équivalence pour $\simeq$.

Comme F est un filtre, par F_1 ; on a : $x \wedge y \in F$.
Or $x \wedge \underline{(x \wedge y)} = x \wedge y = y \wedge \underline{(x \wedge y)}$ et comme $x \wedge y \in F$, $x \sim_F y$, d'où : $y \in |x|$.

$$\text{Donc } F \subseteq |x|$$

a_2 Etant admis $x \in F$, on montre : $|x| \subseteq F$, i.e. : pour tout $y \in B$, si $y \in |x|$ alors $y \in F$. En effet :

Puisque $y \in |x|$, $x \sim_F y$, et il existe $f \in F$ tel que : $x \wedge f = y \wedge f$. Or $x \in F$, donc, par F_1, $x \wedge f = y \wedge f \in F$ et comme $y \wedge f \leq y$, $y \in F$, par F_2.

$$\text{Donc } |x| \subseteq F.$$

Il résulte de a_1 et a_2 que :
$$\text{si } x \in F \text{ alors } |x| = F.$$

b. Dans le sens $\leftarrow$: si $|x| = F$ alors $x \in F$. Trivial puisque $x \in |x|$.

On a donc par a. et b. :
$$x \in F \text{ ssi } |x| = F$$

2. $x \in F$ ssi $|x| = 1_{B/F}$.

On vient de voir que, quel que soit $y \in B$, $y \in F$ ssi $|y| = F$; or $1_B \in F$ et donc $|1_B| = F$. Par ailleurs, comme h est un homomorphisme et en vertu de sa définition :
$$h(1_B) \overset{df.\ h}{=} |1_B| \overset{h\ homo.}{=} 1_{B/F}.$$

On a donc, pour tout $x \in B$:
$$x \in F \text{ ssi } |x| = F = |1_B| = 1_{B/F}\,[9].$$

9. Cette démonstration est un peu longue mais permet de remarquer que F est la classe d'équi-

Par dualité, si l'on définit l'idéal I par $I : \{y^* : y \in F\}$, on a donc que $x \in I$ ssi $|x| = 0_{B/F}$.

On appelle $h : B \to B/F$ tel que défini plus haut, l'homomorphisme *canonique* de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}/F$. Il est aisé de voir que cet homomorphisme est surjectif.

On a maintenant le résultat suivant :

Th$_{15}$: Soit $h : B_1 \to B_2$ un homomorphisme entre deux algèbres de Boole $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. L'ensemble $F : \{x \in B_1 : h(x) = 1_{B_2}\}$ est un filtre et $h[B_1]$ est isomorphe à $\mathcal{B}_1/F$. En effet :

- F est un filtre. En effet :

– soit $x, y \in F$; alors $h(x) = h(y) = 1_{B_2}$, et donc $h(x) \wedge h(y) = 1_{B_2}$ et comme (h, homo.) $h(x) \wedge h(y) = h(x \wedge y)$, $h(x \wedge y) = 1_{B_2}$ donc, par df. de F, $x \wedge y \in F$.

– soit $x \in F$ et $y \in B_1$ tels que $x \leq y$. Comme $h(x) = 1_{B_2}$ et que, par **Th**$_8$, $h(x) \leq h(y)$, $h(y) = 1_{B_2}$ et donc, toujours par df. de F, $y \in F$.

- $h[B_1]$ est isomorphe à $\mathcal{B}_1/F$.

On montre d'abord que pour $x, y \in B_1$, $|x| = |y|$ ssi $h(x) = h(y)$, avec $|x|$ classe d'équivalence de x pour $\sim_F$.

On a en effet :

---

valence de l'un quelconque de ses membres. Voilà une autre démonstration, un peu plus courte. On montre d'abord que, pour tout $x \in B$, $|x| = |1_B|$ ssi $x \in F$ (en se rappelant qu'en général, "$\simeq$" étant une relation d'équivalence quelconque, $|x| = |y|$ ssi $x \simeq y$). En effet :

Dans le sens $\to$: si $|x| = |1_B|$ alors $x \sim_F 1_B$ et donc il existe $y \in F$ tel que $x \wedge y = 1_B \wedge y$; mais $1_B \wedge y = y$ et donc $x \wedge y = y$, d'où $y \leq x$ et comme $y \in F$, il en résulte : $x \in F$.

Dans le sens $\leftarrow$: soit $x \in F$; alors $x \sim_F 1_B$, puisque l'on a : $x \wedge x = 1_B \wedge x = x$ et $x \in F$. Donc $|x| = |1_B|$.

On montre que $|1_B| = 1_{B/F}$. En effet (autre démonstration, sans utiliser l'homomorphisme) : pour tout $x \in B$, $|1_B| = |x \vee x^*| \overset{\text{df. } B/F}{=} |x| \vee |x^*| \overset{\text{df. } B/F}{=} |x| \vee |x|^* = 1_{B/F}$.

Il résulte des deux points précédents : pour tout $x \in B$, $|x| = 1_{B_F}$ ssi $x \in F$.

$$\begin{array}{llll}
|x| = |y| & \text{ssi} & x \sim_F y & \\
& \text{ssi} & x \odot y \in F & \text{par } \mathbf{L}_{13a} \\
& \text{ssi} & h(x \odot y) = 1 & \text{par df. de } F \\
& \text{ssi} & h(x) \odot h(y) = 1 & h \text{ homomorphisme} \\
& \text{ssi} & h(x) = h(y) & \text{par } \mathbf{L}_{13b}
\end{array}$$

On voit donc que à chaque classe d'équivalence $|x|$ pour $\sim_F$, élément de B_1/F, correspond une et une seule image de x par h, élément de $h[B_1] \subseteq B_2$, et réciproquement.

On peut donc définir sans erreur une fonction $f : B_1/F \to h[B_1]$ par : $f(|x|) = h(x)$.

f est uniquement définie et est bijective ; en effet :

- surjective : soit $x' \in h[B_1]$; donc il existe $x \in B_1$ tel que $h(x) = x'$. Comme $|x| \in B_1/F$ et que, par df., $f(|x|) = h(x)$, $f(|x|) = x'$.
- injective : si $f(|x|) = f(|y|)$ alors, par df., $h(x) = h(y)$ et donc, par ce qui précède, $|x| = |y|$.

f est un homomorphisme ; en effet :

- $f(|x| \wedge |y|) \overset{\text{df.de } B/F}{=} f(|x \wedge y|) \overset{\text{df.de} f}{=} h(x \wedge y) \overset{h,\text{homo.}}{=} h(x) \wedge h(y) \overset{\text{df.de} f}{=} f(|x|) \wedge f(|y|)$; même chose pour $f(|x| \vee |y|)$.
- $f(|x|^*) \overset{\text{df.de } B/F}{=} f(|x^*|) \overset{\text{df.de} f}{=} h(x^*) \overset{h,\text{homo.}}{=} h(x)^* \overset{\text{df.de} f}{=} f(|x|)^*$

Il en résulte que f est un isomorphisme entre $\mathcal{B}_1/F$ et $h[B_1]$.

On peut alors démontrer l'important théorème suivant qui fait appel à la notion d'algèbre quotient.

Th$_{16}$: les quatre conditions suivantes sur un filtre F d'une algèbre de Boole $\mathcal{B}$ sont équivalentes :

(a) F est un ultrafiltre.
(b) $\mathcal{B}/F$ est isomorphe à l'algèbre **2**.
(c) pour tout $x \in B$, soit $x \in F$, soit $x^* \in F$ (mais pas les deux)

(d) si $x \vee y \in F$, alors $x \in F$ ou $y \in F$.

On a déjà vu (a) $\leftrightarrow$ (c) (cf. $\mathbf{Th}_2$).

Pour : (b) $\leftrightarrow$ (c) :

– dans le sens $\rightarrow$: si $x \notin F$ alors, par $\mathbf{Th}_{14}$, $|x| \neq 1_{B/F}$ et donc, comme, par (b), B/F ne contient que deux éléments, $|x| = 0_{B/F}$, d'où $|x|^* \overset{\mathrm{df.de}\mathcal{B}/F}{=} |x^*| = 1_{B/F}$ et, toujours par $\mathbf{Th}_{14}$, $x^* \in F$.

– dans le sens $\leftarrow$: soit $|x| \in B/F$ et $\neq 1_{B/F}$; alors, toujours par $\mathbf{Th}_{14}$, $x \notin F$ et, par (c), $x^* \in F$. Donc $|x^*| \overset{\mathrm{df.de}\mathcal{B}/F}{=} |x|^* = 1_{B/F}$; d'où $|x|^{**} = |x| = 0_{B/F}$. Il n'y a donc que deux éléments dans B/F qui est ainsi isomorphe à l'algèbre $\mathbf{2}$.

Pour : (a) $\rightarrow$ (d) :

Supposons F ultrafiltre, $x \vee y \in F$ et $x \notin F$ (par ex.). Comme F est un ultra filtre, le filtre G engendré par $F \cup \{x\}$ n'est pas propre et il y a donc un élément $z \in F$ tel que $z \wedge x = 0$. Puisque $z, x \vee y \in F$, $z \wedge (x \vee y) \in F$. Or $z \wedge (x \vee y) = (z \wedge x) \vee (z \wedge y) = z \wedge y$; donc $z \wedge y \in F$ et comme $z \wedge y \leq y$, $y \in F$.

Pour : (d) $\rightarrow$ (c) :

Pour tout $x \in B$, $x \vee x^* = 1_B \in F$. Donc, par (d), $x \in F$ ou $x^* \in F$.

On a donc : (c) $\leftrightarrow$ (a) et (c) $\leftrightarrow$ (b), donc (b) $\leftrightarrow$ (a). Et : (c) $\leftrightarrow$ (a) et (a) $\rightarrow$ (d), donc : (c) $\rightarrow$ (d) ; comme on a également, (d) $\rightarrow$ (c), on a donc : (c) $\leftrightarrow$ (d). On peut donc tourner en rond : (a) $\leftrightarrow$ (b) $\leftrightarrow$ (c) $\leftrightarrow$ (d) $\leftrightarrow$ (a), etc...

3 Algèbre de Boole et logique des propositions

On aura remarquer que les opérations booléennes "$\wedge$", "$\vee$" et " *" ressemblent furieusement aux habituels connecteurs propositionnels "$\wedge$", "$\vee$" et "$\sim$ ". On va voir comment exploiter les résultats précédents pour démontrer la complétude d'un système d'axiomes pour la logique des propositions.

3.1 Quelques préliminaires logiques.

Dans ce qui suit on admet sans autre forme de procès que l'on dispose du langage habituel pour la logique des propositions, avec comme connecteurs "$\sim$ ", "$\wedge$", "$\vee$" et "$\Rightarrow$" [10].

On appelle $\mathcal{P}$ l'ensemble (infini dénombrables) des lettres de proposition et $\mathcal{F}$, l'ensemble des formules bien formées, avec : $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{F}$.

On admet également que l'on a un système d'axiomes [11] qui comprend, ou permet de déduire, les lois suivantes (schémas) :

T_0 $\vdash (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)\,;\ \vdash (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$ (Commutativité).
T'_0 $\vdash [(\varphi \wedge \psi) \wedge \theta] \Leftrightarrow [\varphi \wedge (\psi \wedge \theta)]\,; \vdash [(\varphi \vee \psi) \vee \theta] \Leftrightarrow [\varphi \vee (\psi \vee \theta)]$ (Associativité).
T''_0 $\vdash [(\varphi \vee \psi) \wedge \psi] \Leftrightarrow \psi\,;\ \ \vdash [(\varphi \wedge \psi) \vee \psi] \Leftrightarrow \psi$ (Absorption).
T_1 $\vdash \varphi \Rightarrow\ \varphi\,;\ \vdash \varphi \vee \sim\varphi\,;\ \vdash\sim(\varphi \wedge \sim\varphi)$
T_2 $\vdash (\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi\,;\ \vdash (\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \psi$
T'_2 $\vdash \varphi \Rightarrow (\varphi \vee \psi)\,;\ \vdash \psi \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$
T_3 $\vdash \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)\,;\ \ \vdash\sim\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$
T_4 $\vdash (\psi \Rightarrow \theta) \Rightarrow [(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \theta)]$ (Syll.).
T_5 $\vdash [(\varphi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta)] \Leftrightarrow [(\varphi \vee \psi) \wedge \theta$ (Distributivité $\wedge/\vee$).
T_6 $\vdash (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow [(\varphi \Rightarrow \theta) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow [\psi \wedge \theta])]$ (Composition).
T'_6 $\vdash (\varphi \Rightarrow \theta) \Rightarrow [(\psi \Rightarrow \theta) \Rightarrow ([\varphi \vee \psi] \Rightarrow \theta])$

Comme on exprime ces axiomes ou thèses sous forme de schémas, on n'a que le *Modus Ponens* comme règle de déduction.

Une *interprétation, i,* est une fonction qui va de $\mathcal{P}$ dans l'algèbre **2** (intuitivement 0 joue le mauvais rôle du Faux et 1 le beau rôle du Vrai). Etant donné une interprétation i, on l'étend à une *évaluation* v_i, fonction qui va de $\mathcal{F}$ dans **2** par la définition récursive suivante (p formule élémentaire quelconque, φ, ψ, formules bien formées quelconques) :

10. On admettra, lorsque ce sera commode, que "$\vee$" et "$\Rightarrow$" et on été introduits par définition.

11. Il existe de multiples systèmes d'axiomes pour la logique des propositions qui sont tous équivalents au sens où ils permettent de déduire les mêmes thèses (à savoir toutes les tautologies !) ; un des plus simples est celui de Church qui est constitué des trois schémas d'axiome suivants : (Ax1) $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$, (Ax2) : $[\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \theta)] \Rightarrow [(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \theta)]$ et (Ax3) : $(\sim\psi \Rightarrow\sim\varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$. On admettra un tel système (Ax) sans fournir les déductions pour les thèses que l'on utilisera.

v^p	$v_i(p) = i(p)$
v^*	$v_i(\sim\varphi) = v_i(\varphi)^*$
$v^\wedge$	$v_i(\varphi \boldsymbol{\wedge} \psi) = v_i(\varphi) \wedge v_i(\psi)$
$v^\vee$	$v_i(\varphi \boldsymbol{\vee} \psi) = v_i(\varphi) \vee v_i(\psi)$
$v^\Rightarrow$	$v_i(\varphi \Rightarrow \psi) = v_i(\varphi)^* \vee v_i(\psi)$

Attention : "$\boldsymbol{\wedge}$" et "$\boldsymbol{\vee}$", en gras (à gauche), sont, respectivement, la conjonction et la disjonction propositionnelle, alors que "$\wedge$" et "$\vee$" (à droite) sont l'inf et le sup dans **2**. Dorénavant, on fait confiance au lecteur pour déterminer si l'on a affaire aux connecteurs ou aux opérations dans **2**.

Lorsque, pour une interprétation i, $v_i(\varphi) = 1$, on dit que i satisfait φ. Une formule qui est satisfaite par toute interprétation est une *tautologie*. On admet que toutes les formules déductibles dans le système d'axiomes sont tautologiques (consistance sémantique).

Exemple : soit la formule $(p \vee q) \Rightarrow p$ avec i telle que $i(p) = 0$ et $i(q) = 1$.
On a alors :

$$\begin{array}{rcll} v_i[(p \vee q) \Rightarrow p] & = & v_i(p \vee q)^* \vee v_i(p) & \text{par } v^\Rightarrow \\ & = & [v_i(p) \ \vee v_i(q)]^* \vee 0 & \text{par } v^\vee \text{ et } v^p \\ & = & [v_i(p)^* \wedge v_i(q)^*] & \text{par (11) et (6) (dans } \mathbf{2}\,!) \\ & = & (0^* \wedge 1^*) & \text{par } v^p \\ & = & (1 \wedge 0) & \text{par (6')} \\ & = & 0 & \text{par (8)} \end{array}$$

Ou encore, pour la formule $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$, avec $i(p) = 0$ et $i(q) = 1$:

$$\begin{array}{rcll} v_i[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)] & = & v_i(p \Rightarrow q)^* \vee v_i(\sim p \Rightarrow \sim q) & \text{par } v^\Rightarrow \\ & = & [v_i(p)^* \vee v_i(q)]^* \vee [v_i(\sim p)^* \vee v_i(\sim q)] & \text{par } v^\Rightarrow \text{ deux fois} \\ & = & (0^* \vee 1)^* \vee [v_i(p)^{**} \vee v_i(q)^*] & \text{par } v^p \text{ et } v^\sim \\ & = & (1 \vee 1)^* \vee [v_i(p) \vee 1^*] & \text{par (6) (10) et } v^p \\ & = & 1^* \vee (0 \vee 0) & \text{par (7), } v^p \text{ et (6')} \\ & = & 0 \vee 0 & \text{par (6') et (7)} \\ & = & 0 & \text{par (7)} \end{array}$$

etc.

3.2 Algèbre de Lindenbaum

3.2.1 Introduction informelle.

On va prouver que toutes les tautologies sont déductibles dans, par ex., le système d'axiomes Ax. Pour ce faire, on va équiper l'ensemble $\mathcal{F}$ d'une structure d'algèbre de Boole.

On peut remarquer, en effet, que l'on a quelque chose qui ressemble à une relation d'ordre sur $\mathcal{F}$. Si l'on raisonne en termes sémantiques, on sait que lorsqu'une implication $\varphi \Rightarrow \psi$ est tautologique, cela signifie que l'ensemble des interprétations qui rendent vrai φ (que l'on peut noter $\mathcal{I}(\varphi)$), est inclus dans l'ensemble des interprétations qui rendent vrai ψ ($\mathcal{I}(\psi)$). Comme on a dans ce cas $\mathcal{I}(\varphi) \subseteq \mathcal{I}(\psi)$, on pourrait donc dire que φ est "avant" ψ dans $\mathcal{F}$.

On sait également que pour toute tautologie, $\top$, $\varphi \Rightarrow \top$ est une tautologie quelle que soit la formule φ (i.e. $\mathcal{I}(\varphi) \subseteq \mathcal{I}(\top)$) et que, pour toute contradiction, $\bot$, $\bot \Rightarrow \varphi$ quelle que soit φ (i.e. $\mathcal{I}(\bot) \subseteq \mathcal{I}(\varphi)$) ; ce qui correspond au fait que l'ensemble des interprétations que rendent vraie une tautologie est l'ensemble des $2^{\aleph_0}$ fonctions de $\mathcal{P}$ dans $\mathbf{2}$ et que l'ensemble des interprétations qui rendent vraie une contradiction est l'ensemble vide. On a donc dans $\mathcal{F}$ quelque chose qui ressemble à un maximum (l'ensemble des tautologies) et un minimum (l'ensemble des contradictions).

Il s'agit maintenant de mettre tout cela en musique en ne faisant appel qu'aux notions syntaxiques de "thèse", de "déduction" etc.

On pourrait ainsi définir la relation d'ordre sur $\mathcal{F}$ par :

$$\varphi \leq \psi \text{ ssi } \vdash \varphi \Rightarrow \psi$$

Toutefois, cela n'est pas vraiment satisfaisant car alors on aurait, par ex. (en supposant déduites les deux thèses) :

- puisque $\vdash (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\sim\psi \Rightarrow \sim\varphi)$, alors $\varphi \Rightarrow \psi \leq \sim\psi \Rightarrow \sim\varphi$ et
- puisque $\vdash (\sim\psi \Rightarrow \sim\varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$, alors $\sim\psi \Rightarrow \sim\varphi \leq \varphi \Rightarrow \psi$

et donc, en vertu de l'antisymétrie de $\leq$: $\varphi \Rightarrow \psi = \sim\psi \Rightarrow \sim\varphi$, ce qui est évidemment faux si l'on considère ces deux formules, *en tant que formules*, i.e. en tant que suites de symboles.

Ce genre de situation ne se rencontre que lorsque l'on a deux thèses de la forme $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$ et $\vdash \psi \Rightarrow \varphi$, c'est à dire tout simplement $\vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$ (intuitivement : si

φ et ψ sont équivalentes)[12]. Au lieu donc de considérer des formules (des suites de symboles), il faut considérer comme identiques, les formules qui sont "équivalentes" au sens ci-dessus, même si elles ne s'écrivent pas de la même manière. On procède alors comme suit.

3.2.2 Construction de l'algèbre de Lindenbaum

On commence par définir une relation d'équivalence "$\equiv$" sur $\mathcal{F}$ par :

$$\varphi \equiv \psi \text{ ssi } \vdash \varphi \Rightarrow \psi \text{ et } \vdash \psi \Rightarrow \varphi \ .$$

Que "$\equiv$" soit une relation d'équivalence est clair :

- réflexivité : par T_1, on a $\vdash \varphi \Rightarrow \varphi$ et donc évidemment $\vdash \varphi \Rightarrow \varphi$ et $\vdash \varphi \Rightarrow \varphi$!
- symétrie : par définition
- transitivité : si l'on a $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$ et $\vdash \psi \Rightarrow \varphi$ (donc $\varphi \equiv \psi$), ainsi que $\vdash \psi \Rightarrow \theta$ et $\vdash \theta \Rightarrow \psi$ (donc $\psi \equiv \theta$), alors par T_4 (Syll) et deux usages du MP, on a $\vdash \varphi \Rightarrow \theta$ et, de la même manière, $\vdash \theta \Rightarrow \varphi$, donc $\varphi \equiv \theta$.

On note la classe d'équivalence d'une formule φ pour $\equiv$, par : $\ulcorner\varphi\urcorner$, i.e.

$$\ulcorner\varphi\urcorner = \{\psi \in \mathcal{F} : \varphi \equiv \psi\}^{13}$$

On note $\mathcal{F}_{\equiv}$ l'ensemble quotient pour $\equiv$, i.e.

$$\mathcal{F}_{\equiv} = \{\ulcorner\varphi\urcorner : \varphi \in \mathcal{F}\}$$

On définit maintenant les opérations "$\wedge$", $\vee$" et "$*$" sur $\mathcal{F}_{\equiv}$ comme suit :

$$\begin{array}{lccc}
\vee^{\mathcal{F}_{\equiv}} & \ulcorner\varphi\urcorner \vee \ulcorner\psi\urcorner & = & \ulcorner\varphi \vee \psi\urcorner \\
\wedge^{\mathcal{F}_{\equiv}} & \ulcorner\varphi\urcorner \wedge \ulcorner\psi\urcorner & = & \ulcorner\varphi \wedge \psi\urcorner \\
*^{\mathcal{F}_{\equiv}} & \ulcorner\varphi\urcorner^{*} & = & \ulcorner{\sim}\varphi\urcorner
\end{array}$$

On définit $1_{F_{\equiv}}$ et $0_{F_{\equiv}}$ par : $\ulcorner\varphi\urcorner = 1_{F_{\equiv}}$ ssi $\vdash \varphi$ et $\ulcorner\varphi\urcorner = 0_{F_{\equiv}}$ ssi $\vdash{\sim}\varphi$.

12. Dans ce qui suit on admet que $\vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$ abrège, lorsque c'est commode : $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$ et $\vdash \psi \Rightarrow \varphi$
13. Attention à ne pas confondre les classes d'équivalence pour $\equiv$ dans $\mathcal{F}$ ($\ulcorner\varphi\urcorner$) et les classes d'équivalence pour $\sim_F$ dans une algèbre de Boole quelconque ($|x|$).

3.2.3 $\mathcal{L}$ est une algèbre de Boole ; 1ère démonstration

Th$_{1_{F_\equiv}7}$: $\mathcal{L} = \langle \mathcal{F}_\equiv, \wedge, \vee, ^*, 1_{F_\equiv}, 0_{F_\equiv} \rangle$ est une algèbre de Boole.

Il faut montrer que les conditions B_1 - B_5 sont satisfaites [14].

- Commutativité : comme, par T_0, $\vdash (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$, il en résulte : $\ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner = \ulcorner \psi \wedge \varphi \urcorner$ et donc :
  $\ulcorner \varphi \urcorner \wedge \ulcorner \psi \urcorner = \ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner = \ulcorner \psi \wedge \varphi \urcorner = \ulcorner \psi \urcorner \wedge \ulcorner \varphi \urcorner$; même chose pour "$\vee$".

- Associativité : comme, par T'_0, $\vdash ([\varphi \wedge \psi] \wedge \theta) \Leftrightarrow (\varphi \wedge [\psi \wedge \theta])$, il en résulte : $\ulcorner (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta \urcorner = \ulcorner \varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \urcorner$ et donc :
  $(\ulcorner \varphi \urcorner \wedge \ulcorner \psi \urcorner) \wedge \ulcorner \theta \urcorner = \ulcorner (\varphi \wedge \psi) \urcorner \wedge \ulcorner \theta \urcorner = \ulcorner (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta \urcorner = \ulcorner \varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \urcorner = \ulcorner \varphi \urcorner \wedge \ulcorner (\psi \wedge \theta) \urcorner = \ulcorner \varphi \urcorner \wedge (\ulcorner \psi \urcorner \wedge \ulcorner \theta \urcorner)$; même chose pour "$\vee$".

- Absorption : comme, par T''_0, $\vdash ([\varphi \vee \psi] \wedge \psi) \Leftrightarrow \psi$, il en résulte : $\ulcorner ([\varphi \vee \psi] \wedge \psi) \urcorner = \ulcorner \psi \urcorner$, et donc :
  $(\ulcorner \varphi \urcorner \vee \ulcorner \psi \urcorner) \wedge \ulcorner \psi \urcorner = \ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner \wedge \ulcorner \psi \urcorner = \ulcorner (\varphi \vee \psi) \wedge \psi \urcorner = \ulcorner \psi \urcorner$; même chose pour l'autre égalité.

- Comme, par T_1, $\vdash \varphi \vee \sim\varphi$, il en résulte : $\ulcorner \varphi \vee \sim\varphi \urcorner = 1_{F_\equiv}$, et donc :
  $\ulcorner \varphi \urcorner \vee \ulcorner \varphi \urcorner^* = \ulcorner \varphi \urcorner \vee \ulcorner \sim\varphi \urcorner = \ulcorner \varphi \vee \sim\varphi \urcorner = 1_{F_\equiv}$; même chose pour l'autre égalité.

- Distributivité : comme, par T_5, $\vdash [(\varphi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta)] \Leftrightarrow [(\varphi \vee \psi) \wedge \theta]$, il en résulte : $\ulcorner (\varphi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta) \urcorner = \ulcorner (\varphi \vee \psi) \wedge \theta \urcorner$, et donc :
  $(\ulcorner \varphi \urcorner \wedge \ulcorner \theta \urcorner) \vee (\ulcorner \psi \urcorner \wedge \ulcorner \theta \urcorner) = \ulcorner (\varphi \wedge \theta) \urcorner \vee \ulcorner (\psi \wedge \theta) \urcorner = \ulcorner (\varphi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta) \urcorner = \ulcorner (\varphi \vee \psi) \wedge \theta \urcorner = \ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner \wedge \ulcorner \theta \urcorner = (\ulcorner \varphi \urcorner \vee \ulcorner \psi \urcorner) \wedge \ulcorner \theta \urcorner$.

L'ordre sur $\mathcal{F}_\equiv$ est défini, comme d'habitude, par : $\ulcorner \varphi \urcorner \leq \ulcorner \psi \urcorner$ ssi $\ulcorner \varphi \urcorner \wedge \ulcorner \psi \urcorner = \ulcorner \varphi \urcorner$.

Mais comme : $\ulcorner \varphi \urcorner \wedge \ulcorner \psi \urcorner = \ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner$, cette condition revient à : $\ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner = \ulcorner \varphi \urcorner$ et donc à : $\vdash (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \varphi$.

De plus, comme $\vdash [(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \varphi] \Leftrightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$ [15], la condition : $\vdash (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \varphi$, est

14. Dans ce qui suit, on fait usage du fait qu'en général, deux éléments appartiennent à une même classe d'équivalence ssi ils entretiennent la relation d'équivalence relativement à laquelle les classes d'équivalence sont déterminées. Ici cela signifie que, quelles que soient les formules φ et ψ, $\ulcorner \varphi \urcorner = \ulcorner \psi \urcorner$ ssi $\varphi \equiv \psi$, et donc, par df. de $\equiv$, ssi $\vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$.

15. On suppose déduite cette thèse dans Ax.

équivalente à : $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$.

On peut donc définir de manière équivalente l'ordre sur $\mathcal{F}_\equiv$ par :

$$\ulcorner\varphi\urcorner \leq \ulcorner\psi\urcorner \text{ ssi } \vdash \varphi \Rightarrow \psi$$

On retrouve ainsi l'intuition initiale.

3.2.4 2ème démonstration.

On n'aura pas fait faute de remarquer que si les conditions B_1 - B_5 sont satisfaites, c'est tout simplement qu'elles ont leur exacts équivalents dans des propriétés élémentaires des connecteurs, qu'expriment les thèses que l'on a utilisées. Il n'y a donc rien de surprenant à ce que $\mathcal{L} = \langle \mathcal{F}_\equiv, \wedge, \vee, ^*, 1_{F_\equiv}, 0_{F_\equiv} \rangle$ soit une algèbre de Boole, ce qui rappelle que ce genre d'algèbre avait été élaboré par Boole en partant justement de l'étude des connecteurs (des "opérations logiques").

Il est peut-être plus amusant et plus instructif de partir de la définition de l'ordre sur $\mathcal{F}_\equiv$ (i.e. $\ulcorner\varphi\urcorner \leq \ulcorner\psi\urcorner$ ssi $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$) et de montrer que $< \mathcal{F}_\equiv, \leq >$ est un treillis distributif complémenté. On utilisera alors d'autres thèses.

Th$_{18}$ $\langle \mathcal{F}_\equiv, \leq \rangle$ est un treillis distributif complémenté dans lequel :

$$\ulcorner\varphi\urcorner = 1_{F_\equiv} \text{ ssi } \vdash \varphi \quad \text{et} \quad \ulcorner\varphi\urcorner = 0_{F_\equiv} \text{ ssi } \vdash \sim\varphi.$$

"$\leq$" est une relation d'ordre (partiel) :

- réflexivité : puisque $\vdash \varphi \Rightarrow \varphi$ (T_1), on a $\ulcorner\varphi\urcorner \leq \ulcorner\varphi\urcorner$.
- antisymétrie : puisque si $\ulcorner\varphi\urcorner \leq \ulcorner\psi\urcorner$ et $\ulcorner\varphi\urcorner \leq \ulcorner\psi\urcorner$, alors $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$ et $\vdash \psi \Rightarrow \varphi$ et donc, par df., $\varphi \equiv \psi$, d'où $\ulcorner\varphi\urcorner = \ulcorner\psi\urcorner$.
- transitivité : puisque si $\ulcorner\varphi\urcorner \leq \ulcorner\psi\urcorner$ et $\ulcorner\psi\urcorner \leq \ulcorner\theta\urcorner$ alors $\vdash \varphi \Rightarrow \psi$ et $\vdash \varphi \Rightarrow \theta$ et donc, en vertu de Syll. (T_4), et deux usages du MP, $\vdash \varphi \Rightarrow \theta$, d'où : $\ulcorner\varphi\urcorner \leq \ulcorner\theta\urcorner$.

On montre que $\ulcorner\varphi\urcorner \wedge \ulcorner\psi\urcorner = \ulcorner\varphi \wedge \psi\urcorner$, autrement dit on montre que $\ulcorner\varphi \wedge \psi\urcorner$ est l'infimum de $\{\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner\}$.

Comme (T_2) $\vdash (\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi$ et $\vdash (\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \psi$, on a :

$$\ulcorner\varphi \wedge \psi\urcorner \leq \ulcorner\varphi\urcorner \quad \text{et} \quad \ulcorner\varphi \wedge \psi\urcorner \leq \ulcorner\psi\urcorner$$

$\ulcorner\varphi \wedge \psi\urcorner$ est donc une limite inférieur de $\{\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner\}$. On montre que c'est la plus grande ; en effet, soit θ une limite inférieure de $\{\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner\}$, i.e. $\ulcorner\theta\urcorner \leq \ulcorner\varphi\urcorner$ et $\ulcorner\theta\urcorner \leq \ulcorner\psi\urcorner$.
En ce cas : $\vdash \theta \Rightarrow \varphi$ et $\vdash \theta \Rightarrow \psi$ et par Comp. (T_6) et deux usages du MP, on a : $\vdash \theta \Rightarrow (\varphi \wedge \psi)$ et donc $\ulcorner\theta\urcorner \leq \ulcorner\varphi \wedge \psi\urcorner$. $\ulcorner\varphi \wedge \psi\urcorner$ est donc la plus grande limite inférieure de $\{\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner\}$, i.e. :

$$\ulcorner\varphi\urcorner \wedge \ulcorner\psi\urcorner = \ulcorner\varphi \wedge \psi\urcorner$$

On montre de la même manière que $\ulcorner\varphi\urcorner \vee \ulcorner\psi\urcorner = \ulcorner\varphi \vee \psi\urcorner$, en utilisant T'_2 et T'_6.

Toute paire d'éléments de $\mathcal{F}_\equiv$ a donc un infimum et un suprémum dans $\mathcal{F}_\equiv$ et, en conséquence, $< \mathcal{F}_\equiv, \leq >$ est bien un treillis.

Comme, de plus, on a déjà démontré, dans le cours de la démonstration du $\mathbf{Th}_{17}$ que :

$$(\ulcorner\varphi\urcorner \wedge \ulcorner\theta\urcorner) \vee (\ulcorner\psi\urcorner \wedge \ulcorner\theta\urcorner) = (\ulcorner\varphi\urcorner \vee \ulcorner\psi\urcorner) \wedge \ulcorner\theta\urcorner,$$

$\langle\mathcal{F}_\equiv, \leq\rangle$ est un treillis *distributif*.

On montre maintenant que

$$\ulcorner\varphi\urcorner = 1_{F_\equiv} \text{ ssi } \vdash \varphi \quad \text{et} \quad \ulcorner\varphi\urcorner = 0_{F_\equiv} \text{ ssi } \vdash\sim\varphi.$$

Dans le sens $\rightarrow$. Supposons $\ulcorner\varphi\urcorner = 1_{F_\equiv}$. En ce cas, pour tout ψ, $\ulcorner\psi\urcorner \leq \ulcorner\varphi\urcorner$ et donc, pour tout ψ : $\vdash \psi \Rightarrow \varphi$. Comme cela vaut de tout ψ, cela vaut en particulier pour un ψ tel que $\vdash \psi$ et donc par MP : $\vdash \varphi$.
Même chose pour montrer que si $\ulcorner\varphi\urcorner = 0_{F_\equiv}$ alors $\vdash\sim\varphi$ (avec *Modus Tollens*)[16].

Dans le sens $\leftarrow$. Supposons $\vdash \varphi$. En ce cas, puisque, $\vdash \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$ (T_3), on a, avec un usage du MP : pour tout ψ, $\vdash \psi \Rightarrow \varphi$. Et donc, pour tout ψ, $\ulcorner\psi\urcorner \leq \ulcorner\varphi\urcorner$, d'où : $\ulcorner\varphi\urcorner = 1_{F_\equiv}$.
Même chose pour montrer que si $\vdash\sim \varphi$, alors $\ulcorner\sim \varphi\urcorner = 0_{F_\equiv}$, en utilisant : $\vdash\sim\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$.

Il reste à montrer que $\langle\mathcal{F}_\equiv, \leq\rangle$ est un treillis distributif, *complémenté*.

16. Il peut sembler chagrinant de recourir au *Modus Tollens*, mais il suffit d'admettre que l'on a une déduction pour la loi de contraposition sous la forme $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\sim\psi \Rightarrow\sim\varphi)$.

Comme, par T_1, $\vdash \varphi \vee \sim\varphi$ et $\vdash \sim(\varphi \wedge \sim\varphi)$, on a, par ce qui précède :

- $1_{F_\equiv} = \ulcorner \varphi \vee \sim\varphi \urcorner = \ulcorner \varphi \urcorner \vee \ulcorner \sim\varphi \urcorner$ et
- $0_{F_\equiv} = \ulcorner \varphi \wedge \sim\varphi \urcorner = \ulcorner \varphi \urcorner \wedge \ulcorner \sim\varphi \urcorner$

d'où : $\ulcorner \sim\varphi \urcorner$ est le complémentaire de $\ulcorner \varphi \urcorner$, que l'on note $\ulcorner \varphi \urcorner^*$.

$< \mathcal{F}_\equiv, \leq >$ est donc bien un treillis distributif, complémenté, i.e. une algèbre de Boole.

3.3 Complétude de Ax

En s'appuyant sur tout ce qui précède, on peut maintenant démontrer que toutes les tautologies sont déductibles dans le système Ax (ou tout autre système équivalent dans lequel on a déduit les thèses dont on a fait usage précédemment).

L'idée qui préside à cette démonstration est simple si l'on se souvient de la définition syntaxique d'un ensemble de vérité. Soit uF, un ultrafiltre (propre), dans $\mathcal{L}$, alors :

- Par $\mathbf{Th}_2$, pour tout $\varphi \in \mathcal{F}$, $\ulcorner \varphi \urcorner \in uF$ ou $\ulcorner \varphi \urcorner^* \overset{*^{\mathcal{F}_\equiv}}{=} \ulcorner \sim\varphi \urcorner \in uF$, mais pas les deux.

- si $\ulcorner \varphi \urcorner$ et $\ulcorner \psi \urcorner$ appartiennent à uF alors, par F_1, $\ulcorner \varphi \urcorner \wedge \ulcorner \psi \urcorner \in uF$ et donc, par $\wedge^{\mathcal{F}_\equiv}$, $\ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner \in uF$.
  De plus, puisque $\ulcorner \varphi \urcorner \wedge \ulcorner \psi \urcorner \leq \ulcorner \varphi \urcorner$ et $\ulcorner \varphi \urcorner \wedge \ulcorner \psi \urcorner \leq \ulcorner \psi \urcorner$, si $\ulcorner \varphi \urcorner \wedge \ulcorner \psi \urcorner \in uF$, et donc, toujours par $\wedge^{\mathcal{F}_\equiv}$, si $\ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner \in uF$, alors $\ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner \in uF$. On a donc :

$$\ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner \in uF \quad \text{ssi} \quad \ulcorner \varphi \urcorner \in uF \text{ et } \ulcorner \psi \urcorner \in uF.$$

On voit donc que s'agissant des classes d'équivalence pour $\equiv$, un ultrafiltre dans $\mathcal{L}$ satisfait les clauses syntaxiques définissant un ensemble de vérité ; on peut s'amuser à montrer que les clauses concernant $\vee$ et $\Rightarrow$ sont également satisfaites, mais cela n'ajoutera rien de substantiel [17].

17. Rappelons ces clauses, W étant un ensemble de formules ($W \subseteq \mathcal{F}$) :
-$\varphi \vee \psi \in W$ ssi $\varphi \in W$ ou $\psi \in W$
-$\varphi \Rightarrow \psi \in W$ ssi $\sim\varphi \in W$ ou $\psi \in W$.

Il est donc très probable (!!) que l'on puisse associer à chaque ultrafiltre, uF, dans $\mathcal{L}$, une évaluation qui satisfasse toutes les formules dont les classes d'équivalence appartiennent à uF, et inversement qu'à chaque évaluation corresponde un ultrafiltre dans $\mathcal{L}$ contenant toutes les classes d'équivalence des formules vraies pour cette évaluation.

Si tel est le cas (ce que l'on va montrer), comme on sait que dans $\mathcal{L}$, $1_{F_\equiv} = \ulcorner\varphi\urcorner$ ssi $\vdash \varphi$, on pourra montrer que si une formule φ n'est pas déductible dans Ax (i.e. $\nvdash \varphi$, et donc $\ulcorner\varphi\urcorner \neq 1_{F_\equiv}$), alors il existe une évaluation qui satisfait sa négation (il existe un ultrafiltre qui contient $\ulcorner\sim\varphi\urcorner$) et φ n'est donc pas tautologique ; ce qui, par contraposition prouvera la complétude de Ax.

3.3.1 Ultrafiltre dans $\mathcal{L}$ et évaluation.

On montre tout d'abord comment un homomorphisme de $\mathcal{L}$ dans $\mathbf{2}$ induit une évaluation v_i des formules du langage pour la logique des propositions.

Th$_{19}$: Soit g un homomorphisme de $\mathcal{L}$ dans $\mathbf{2}$. On définit l'interprétation $i : \mathcal{P} \to \mathbf{2}$, par :

$$i(p) = g(\ulcorner p\urcorner)$$

pour tout $p \in \mathcal{P}$.

A démontrer : $v_i(\varphi) = g(\ulcorner\varphi\urcorner)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{F}$. Par récurrence sur le degré des formules[18].

- $dg(\varphi) = 0$ et donc φ de la forme p. Evident : $v_i(p) = i(p) = g(\ulcorner p\urcorner)$.
- Hyp. de réc. : $v_i(\varphi) = g(\ulcorner\varphi\urcorner)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{F}$ de degré $< n$.
  - φ de la forme $\sim\psi$ et de degré n : $v_i(\sim\psi) \overset{v^*}{=} v_i(\psi)^* \overset{\text{hyp.rec.}}{=} g(\ulcorner\psi\urcorner)^* \overset{g,\ \text{homo.}}{=} g(\ulcorner\psi\urcorner^*) \overset{*^{\mathcal{F}_\equiv}}{=} g(\ulcorner\sim\psi\urcorner)$.
  - φ de la forme $\psi \wedge \theta$ et de degré n : $v_i(\psi \wedge \theta) \overset{v^\wedge}{=} v_i(\psi) \wedge v_i(\theta) \overset{\text{hyp.rec.}}{=} g(\ulcorner\psi\urcorner) \wedge g(\ulcorner\theta\urcorner) \overset{g,\ \text{homo.}}{=} g(\ulcorner\psi\urcorner \wedge \ulcorner\theta\urcorner) \overset{\wedge^{\mathcal{F}_\equiv}}{=} g(\ulcorner\psi \wedge \theta\urcorner)$[19].

18. On ne fait la démonstration que pour $\sim$ et $\wedge$, ce qui suffit.
19. A l'attention du lecteur un peu perdu, il faut lire cette dernière suite d'égalités ainsi : dans $v_i(\psi \wedge \theta)$, $\wedge$ est l'habituel connecteur propositionnel, et cette formule est envoyée sur $\mathbf{2}$ (i.e. $\{0, 1\}$)

On dit dans ce cas que v_i est l'évaluation *induite par* h.

Considérons maintenant un ultrafiltre uF dans $\mathcal{L}$. On a vu (**Th**$_{16}$) que $\mathcal{L}/uF \cong \mathbf{2}$ et on peut donc assimiler ces deux algèbres. Donc l'homomorphisme canonique, h_c, entre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}/uF$ qui envoie, quelle que soit φ, $\ulcorner\varphi\urcorner$ sur $|\ulcorner\varphi\urcorner|$, est un homomorphisme entre $\mathcal{L}$ et $\mathbf{2}$ et induit une évaluation v_i, telle que :

Th$_{20}$: $v_i(\varphi) = 1$ ssi, par **Th**$_{19}$, $h_c(\ulcorner\varphi\urcorner) = 1$ ssi, par **Th**$_{14}$, $\ulcorner\varphi\urcorner \in uF$.

Cela revient à dire que toutes les formules dont les classes d'équivalence pour $\equiv$ appartiennent à uF, prennent la valeur 1 ($\approx$ Vrai) pour l'évaluation induite par h.

On notera $v_{i_{uF}}$ l'évaluation induite par $h_c : \mathcal{L} \to \mathcal{L}/uF \cong \mathbf{2}$; on appellera également $v_{i_{uF}}$ "l'évaluation correspondant à uF".

Th$_{21}$: réciproquement, on montre que si $i : \mathcal{P} \to \mathbf{2}$ est une interprétation des lettres de proposition, alors l'ensemble :

$$F_i = \{\ulcorner\varphi\urcorner : v_i(\varphi) = 1\}$$

est un ultrafiltre dans $\mathcal{L}$. En effet :

- soit $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$ quelconques et $\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner \in F_i$. Alors, par df. de F_i, $v_i(\varphi) = v_i(\psi) = 1$ et donc $v_i(\varphi) \wedge v_i(\psi) = 1$, ce qui, par $v^\wedge$, revient à : $v_i(\varphi \wedge \psi) = 1$; d'où : $\ulcorner\varphi \wedge \psi\urcorner \in F_i$ et donc, par $\wedge^{\mathcal{F}_\equiv}$, $\ulcorner\varphi\urcorner \wedge \ulcorner\psi\urcorner \in F_i$.

- soit $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$ quelconques, $\ulcorner\varphi\urcorner \in F_i$, $\ulcorner\psi\urcorner \in \mathcal{F}_\equiv$ et $\ulcorner\varphi\urcorner \leq \ulcorner\psi\urcorner$. Alors $\ulcorner\varphi\urcorner \wedge \ulcorner\psi\urcorner = \ulcorner\varphi\urcorner$, i.e., par $\wedge^{\mathcal{F}_\equiv}$, $\ulcorner\varphi \wedge \psi\urcorner = \ulcorner\varphi\urcorner$ et comme $\ulcorner\varphi\urcorner \in F_i$, $\ulcorner\varphi \wedge \psi\urcorner \in F_i$, d'où, par df. de F_i, $v_i(\varphi \wedge \psi) = 1$, et par $v^\wedge$, $v_i(\varphi) \wedge v_i(\psi) = 1$, c'est à dire

par v_i. En vertu de la définition de v_i, la valeur d'une conjonction dans $\mathbf{2}$ est l'inf de la valeur des deux conjoints pour v_i : dans le deuxième membre de cette suite d'égalité, $\wedge$ est donc l'opération "inf" dans $\mathbf{2}$. On peut donc utiliser l'hyp. de réc. ce qui nous fait passer au troisième membre de la suite dans lequel $\wedge$ est encore l'opération "inf" dans $\mathbf{2}$. Mais comme g est un homomorphisme entre $\mathcal{L}$ et $\mathbf{2}$, l'inf, dans $\mathbf{2}$, de deux images par g d'éléments de $\mathcal{F}_\equiv$ est identique à l'image, par g, de l'inf, dans $\mathcal{F}_\equiv$ des deux éléments en question ; et donc dans le quatrième membre de la suite, $\wedge$ est l'opération "inf" dans $\mathcal{L}$. Enfin, en vertu de la définition de l'inf dans $\mathcal{L}$, l'inf de deux éléments de $\mathcal{F}_\equiv$ (classes d'équivalence, pour $\equiv$, de ψ et de θ, ici) est égal à la classe d'équivalence, pour $\equiv$, de la conjonction de ψ et de θ ; $\wedge$ est donc, dans ce dernier membre, l'habituel connecteur propositionnel. Est-ce clair ?

$1 \wedge v_i(\psi) = 1$ et donc $v_i(\psi) = 1$. Il en résulte : $\ulcorner\psi\urcorner \in F_i$.

F_i est donc un filtre dans $\mathfrak{L}$. On montre, en utilisant $\mathbf{Th}_2$, que F_i est un ultrafiltre. En effet :

– soit $\varphi \in \mathfrak{F}$ quelconque et $\ulcorner\varphi\urcorner \notin F_i$ (par ex.). On a alors : $\ulcorner\varphi\urcorner \notin F_i$ ssi $v_i(\varphi) = 0$ ssi $v_i(\varphi)^* \overset{v^*}{=} v_i(\sim\varphi) = 1$ ssi $\ulcorner\sim\varphi\urcorner \overset{*^{\mathfrak{F}_\equiv}}{=} \ulcorner\varphi\urcorner^* \in F_i$.

Il résulte donc des deux résultats précédents qu'à tout ultrafiltre dans $\mathfrak{L}$ correspond une interprétation des lettres de proposition, et, inversement qu'à toute interprétation, correspond un ultrafiltre dans $\mathfrak{L}$. En d'autres termes, il y a une correspondance 1-1 entre l'ensemble des interprétations et l'ensemble des ultrafiltres dans $\mathfrak{L}$.

3.3.2 Théorème de complétude.

$\mathbf{Th}_{22}$: Toutes les tautologies sont déductibles dans Ax.

Par contraposition : soit φ tel que $\nvdash \varphi$. Alors par $\mathbf{Th}_{17}$ (ou $\mathbf{Th}_{18}$), $\ulcorner\varphi\urcorner \neq 1_{F_\equiv}$ et donc $\ulcorner\varphi\urcorner^* = \ulcorner\sim\varphi\urcorner \neq 0_{F_\equiv}$. Il en résulte, par $\mathbf{C}_5$ que $\ulcorner\sim\varphi\urcorner$ appartient à un ultrafiltre uF. Soit $v_{i_{uF}}$, l'évaluation correspondant à uF. Par $\mathbf{Th}_{20}$, on a donc : $v_{i_{uF}}(\sim\varphi) = v_{i_{uF}}(\varphi)^* = 1$ et donc $v_{i_{uF}}(\varphi)^{**} = v_{i_{uF}}(\varphi) = 0$; φ n'est donc pas une tautologie.

Ainsi, si $\nvdash \varphi$, alors φ n'est pas une tautologie ; par contraposition :

si φ est une tautologie, alors $\vdash \varphi$.

CQFD

A Liste des théorèmes.

- **Th**$_1$: quel que soit $A \subseteq B$, $(A^i)^s$ est un filtre (pas nécessairement propre) ; et $(A^i)^s$ est un filtre propre ssi A est d'intersection finie (p. 8).

- **Th**$_2$: si uF est un filtre, alors uF est un ultrafiltre (propre) ssi pour tout $x \in B$, soit $x \in uF$, soit $x^* \in uF$, mais pas les deux (p. 9).

- **Th**$_3$ **: théorème de l'ultrafiltre** : tout filtre peut être étendu à un ultrafiltre (p. 10).

- **C**$_4$: dans une algèbre de Boole $\mathcal{B}$, tout sous-ensemble d'intersection finie de B peut être étendu à un ultrafiltre (p. 11).

- **C**$_5$: dans une algèbre de Boole $\mathcal{B}$, tout élément $x \in B$ tel que $x \neq 0$ appartient à un ultrafiltre (p. 11).

- **C**$_6$: si x et y sont deux éléments distincts d'une algèbre de Boole, il y a un ultrafiltre contenant l'un mais pas l'autre (p. 11).

- **Th**$_7$: soit F un filtre dans $\mathcal{B}$ et $I = \{x^* \in B : x \in F\}$. $F \cup I = B'$ est la base d'une sous algèbre $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{B}$ (p. 12).

  Soit $h : B_1 \to B_2$, homomorphisme entre $\mathcal{B}_1$ et$\mathcal{B}_2$ (**Th**$_8$ $\to$ **L**$_{11}$) :

- **Th**$_8$ pour tout $x, y \in B_1$, si $x \leq y$ alors $h(x) \leq h(y)$ (p. 13).

- **Th**$_9$: $h(0_{B_1}) = 0_{B_2}$ et $h(1_{B_1}) = 1_{B_2}$ (p. 13).

- **Th**$_{10}$: $h[B_1] \sqsubseteq \mathcal{B}_2$ (p. 13).

- **L**$_{11}$: si F est un filtre dans $\mathcal{B}_1$, alors $h[F]$ est un filtre dans $\mathcal{B}_2$ (p. 13).

- **Th**$_{12}$: $\sim_F$ est une *congruence* sur B (p. 14).

- **L**$_{13a}$: $x \sim_F y$ ssi $(x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y) \in F$ (p. 16).

- **L**$_{13b}$: $(x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y) = 1$ ssi $x = y$ (p. 16).

- $\mathbf{Th}_{14}$: $|x| = 1_{B/F}$ ssi $x \in F$ ($1_{B/F}$ est le 1 de B/F) (p. 18).

- $\mathbf{Th}_{15}$: soit $h : B_1 \to B_2$ un homomorphisme entre $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. L'ensemble $F : \{x \in B_1 : h(x) = 1_{B_2}\}$ est un filtre et $h[B_1]$ est isomorphe à $\mathcal{B}_1/F$ (p. 20).

- $\mathbf{Th}_{16}$: F est un ultrafiltre **ssi** $\mathcal{B}/F$ est isomorphe à l'algèbre **2** **ssi** pour tout $x \in B$, soit $x \in F$, soit $x^* \in F$ (mais pas les deux) **ssi**, si $x \vee y \in F$, alors $x \in F$ ou $y \in F$ (p. 21).

- $\mathbf{Th}_{17}$: $\mathcal{L} =< \mathcal{F}_{\equiv}, \wedge, \vee, ^*, 1_{\mathcal{F}_{\equiv}}, 0_{\mathcal{F}_{\equiv}} >$ est une algèbre de Boole (p. 27).

- $\mathbf{Th}_{18}$ $< \mathcal{F}_{\equiv}, \leq >$ est un treillis distributif complémenté ; $\ulcorner\varphi\urcorner = 1_{\mathcal{F}_{\equiv}}$ ssi $\vdash \varphi$ et $\ulcorner\varphi\urcorner = 0_{\mathcal{F}_{\equiv}}$ ssi $\vdash\sim\varphi$ (p. 28).

- $\mathbf{Th}_{19}$: soit g un homomorphisme de $\mathcal{L}$ dans **2** et $i : \mathcal{P} \to \mathbf{2}$ telle que, pour tout $p \in \mathcal{P} : i(p) = g(\ulcorner p\urcorner)$; alors $v_i(\varphi) = g(\ulcorner\varphi\urcorner)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{F}$ (p. 31).

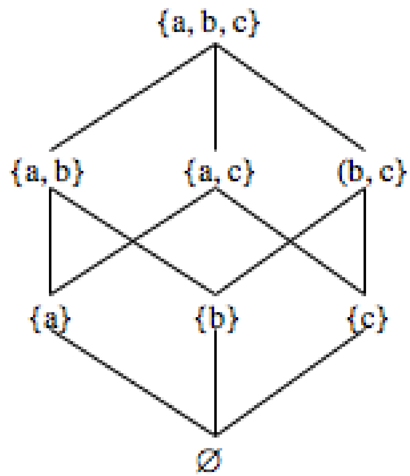
- $\mathbf{Th}_{20}$: $v_i(\varphi) = 1$ ssi $\ulcorner\varphi\urcorner \in uF$ (p. 32).

- $\mathbf{Th}_{21}$: si $i : \mathcal{P} \to \mathbf{2}$ est une interprétation des lettres de proposition, alors l'ensemble $F_i = \{\ulcorner\varphi\urcorner : v_i(\varphi) = 1\}$ est un ultrafiltre dans $\mathcal{L}$ (p. 32).

- $\mathbf{Th}_{22}$ (complétude) : toutes les tautologies sont déductibles dans Ax (p. 33).

B Exemple

Soit $\mathcal{B}$ la petite algèbre de Boole de l'ensemble des parties d'un ensemble à trois éléments dont la base est formé de l'ensemble $\wp(A)$, avec $A = \{a, b, c\}$; dans une telle algèbre, les opérations booléennes $\wedge$, $\vee$ et * correspondent aux opérations ensemblistes : $\cap$, $\cup$ et $\complement_A$ (complémentaire relativement à A)



Soit le filtre $F = \big\{\{a, b, \}, \{a, b, c\}\big\}$.

Les éléments qui entretiennent la relation $\sim_F$ (cf. p. 14) relativement à F sont :
- $\{a\}$ et $\{a, c\}$ avec pour $f \in F$, $\{a, b\}$; en effet : $\{a\} \wedge \{a, b\} = \{a, c\} \wedge \{a, b\} = \{a\}$,
- $\{b\}$ et $\{b, c\}$ avec pour $f \in F$, $\{a, b\}$,
- $\{a, b\}$ et $\{a, b, c\}$ avec pour $f \in F$, $\{a, b\}$,
- $\emptyset$ et $\{c\}$ avec pour $f \in F$, $\{a, b\}$.

Autrement dit, on a quatre classes d'équivalence pour $\sim_F$ [20] :

$$
\begin{array}{lcl}
\{c\} \sim_F \emptyset & \rightarrow & \big\{\{c\}, \emptyset\big\} \\
\{a\} \sim_F \{a, c\} & \rightarrow & \big\{\{a\}, \{a, c\}\big\} \\
\{b\} \sim_F \{b, c\} & \rightarrow & \big\{\{b\}, \{b, c\}\big\} \\
\{a, b\} \sim_F \{a, b, c\} & \rightarrow & \big\{\{a, b\}, \{a, b, c\}\big\}
\end{array}
$$

20. On pourra s'amuser à constater que si l'on considère un autre filtre, par ex. le filtre $\big\{\{b, c\}, \{a, b, c\}\big\}$, on ne retrouve pas les mêmes classes d'équivalence.

On voit que les éléments de la première sont complémentaires de ceux de la dernière ($= F$), et $\{\emptyset, \{c\}\}$ est un idéal, disons I. De la même manière, les éléments de la seconde sont complémentaires de ceux de la troisième. On remarque également que $F = \big\{\{a,b\}, \{a,b,c\}\big\}$ est la classe d'équivalence de l'un quelconque de ses éléments, ce qui illustre la première partie de la démonstration du $\mathbf{Th}_{14}$.

Le fait que $\sim_F$ est une congruence signifie la chose suivante.

Soit les deux équivalences : $\{a\} \sim_F \{a,c\}$ et $\{b\} \sim_F \{b,c\}$.

Faisons par ex. $\{a\} \wedge \{b\}$, cela donne, en termes ensemblistes ($\wedge \to \cap$), $\emptyset$. Faisons maintenant $\{a,c\} \wedge \{b,c\}$, cela donne $\{c\}$. Et comme on l'a remarqué plus haut, on a bien : $\{c\} \sim_F \emptyset$.

De la même manière, faisons $\{a,c\} \wedge \{b\}$, on obtient $\emptyset$. Et maintenant faisons $\{a\} \wedge \{b,c\}$, on obtient là encore $\emptyset$ et, comme $\sim_F$ est une relation d'équivalence, on a évidemment $\emptyset \sim_F \emptyset$.

Autrement dit, les inf. de n'importe élément de la classe $\big\{\{a\}, \{a,c\}\big\}$, avec n'importe quel élément de la classe $\big\{\{b\}, \{b,c\}\big\}$ sont $\sim_F$-équivalents et appartiennent donc à la même classe d'équivalence, à savoir :$\big\{\emptyset, \{c\}\big\}$. Ce qui revient à dire que l'on a :

$$\{a\} \wedge \{b\} \sim_F \{a,c\} \wedge \{b\} \sim_F \{a\} \wedge \{b,c\} \sim_F \{a,c\} \wedge \{b,c\}.$$

Ce que l'on peut exprimer également par :

$$|\{a\} \wedge \{b\}| = |\{a,c\} \wedge \{b\}| = |\{a\} \wedge \{b,c\}| = |\emptyset| \overset{\emptyset \sim_F \{c\}}{=} |c| = |\{a,c\} \wedge \{b,c\}|.$$

Ainsi il n'y a pas d'ambiguïté : comme on a $|\{a\}| = |\{a,c\}|$ et $|\{b\}| = |\{b,c\}|$ on s'attend évidemment à ce que l'on ait (par substitution des identiques), par ex. :

$|\{a\}| \wedge |\{b\}| = |\{a,c\}| \wedge |\{b,c\}|$ ce qui est bien le cas si l'on adopte la définition de $\wedge$ (dans B/F) donnée p. 18, à savoir :

$|\{a\}| \wedge |\{b\}| = |\{a\} \wedge \{b\}|$ et

$|\{a,c\}| \wedge |\{b,c\}| = |\{a,c\} \wedge \{b,c\}|$

puisque $|\{a\} \wedge \{b\}| = |\emptyset| \overset{\emptyset \sim_F \{c\}}{=} |\{c\}| = |\{a,c\} \wedge \{b,c\}|$

Pour déterminer l'ordre dans B/F, il suffit de calculer les différentes formules de la forme $x \wedge y$ (ou $x \vee y$) : par ex :

$|\{b\}| \wedge |\{a,b\}| = |\{b\} \wedge \{a,b\}| = |\{b\}|$; d'où : $|\{b\}|(= |\{b,c\}|) \leq |\{a,b\}|(= |\{a,b,c\}|)$; etc.

On s'assure de manière semblable que $|\{a\}|^* = |\{b\}|$ et que $|\emptyset|^* = |\{a,b,c\}|$.

L'ordre dans B/F est donc le suivant : $I \leq \big\{\{a\},\{a,c\}\big\} \leq F$ et $I \leq \big\{\{b\},\{b,c\}\big\} \leq F$ mais pas d'ordre entre $\big\{\{a\},\{a,c\}\big\}$ et $\big\{\{b\},\{b,c\}\big\}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \begin{array}{c}\big\{\{a,b\},\{a,b,c\}\big\}\\ \text{i.e. } F\end{array} & & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
\big\{\{a\},\{a,c\}\big\} & & & & \big\{\{b\},\{b,c\}\big\} \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 & & \begin{array}{c}\big\{\emptyset,\{c\}\big\}\\ \text{i.e. } I\end{array} & &
\end{array}$$

Le graphe de l'homomorphisme canonique $h : B \to B/F$ $(h(x) = |x|)$ est alors :

$$\begin{array}{lclcl}
h(\{c\}) & = & h(\emptyset) & = & \big\{\emptyset,\{c\}\big\} = I \\
h(\{a\}) & = & h(\{a,c\}) & = & \big\{\{a\},\{a,c\}\big\} \\
h(\{b\}) & = & h(\{b,c\}) & = & \big\{\{b\},\{b,c\}\big\} \\
h(\{a,b\}) & = & h(\{a,b,c\}) & = & \big\{\{a,b\},\{a,b,c\}\big\} = F
\end{array}$$

Table des matières