

Exercices du 20 janvier 2014

1. Soit la formule :

$$\forall x[\exists y(Rxy \Rightarrow Py) \Rightarrow \exists z(\exists xQx \vee Rzy)]$$

- Quelle est la *portée* du quantificateur universel en x ? du quantificateur existentiel en y ? du quantificateur existentiel en z ?
- Par quel quantificateur la variable x , dans la sous-formule " Qx ", est-elle liée?
- Y a-t-il dans cette formule une ou des variables qui ont des occurrences libres et liées? si oui, laquelle ou lesquelles?
- Faites l'arbre de décomposition de cette formule.
- Quel est le *degré* de cette formule?

2. Soit la formule φ :

$$\forall x[(Px \wedge Pz) \Rightarrow \exists yRxy]$$

Soit maintenant le domaine $D = \{a, b, c, d\}$ et l'interprétation suivante des lettres de prédicat :

$$\mathbf{P} = \{b, d\}$$

$$\mathbf{R} = \{\langle a, b \rangle, \langle d, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle d, b \rangle\}.$$

La formule φ est-elle vraie dans D pour l'interprétation, i , des variables d'individu, définie par :

$$i(x) = c, i(y) = c \text{ et } i(z) = d?$$

Si φ n'est pas vraie pour cette interprétation i (i.e. si $D \not\models_i \varphi$), y a-t-il au moins une autre interprétation des variables d'individu pour laquelle φ serait vraie dans D ? si oui, laquelle?

Corrigé des exercices du 20 janvier 2014

1. Soit la formule :

$$\forall x[\exists y(Rxy \Rightarrow Py) \Rightarrow \exists z(\exists xQx \vee Rzy)]$$

- Quelle est la portée du quantificateur universel en x ? du quantificateur existentiel en y ? du quantificateur existentiel en z ?

$$\forall \mathbf{x} \overbrace{[\exists y(Rxy \Rightarrow Py) \Rightarrow \exists z(\exists xQx \vee Rzy)]}^{\forall x}$$

$$\forall x \overbrace{[\exists \mathbf{y}(Rxy \Rightarrow Py) \Rightarrow \exists z(\exists xQx \vee Rzy)]}^{\exists y}$$

$$\forall x[\exists y(Rxy \Rightarrow Py) \Rightarrow \exists \mathbf{z} \overbrace{(\exists xQx \vee Rzy)}^{\exists z}]$$

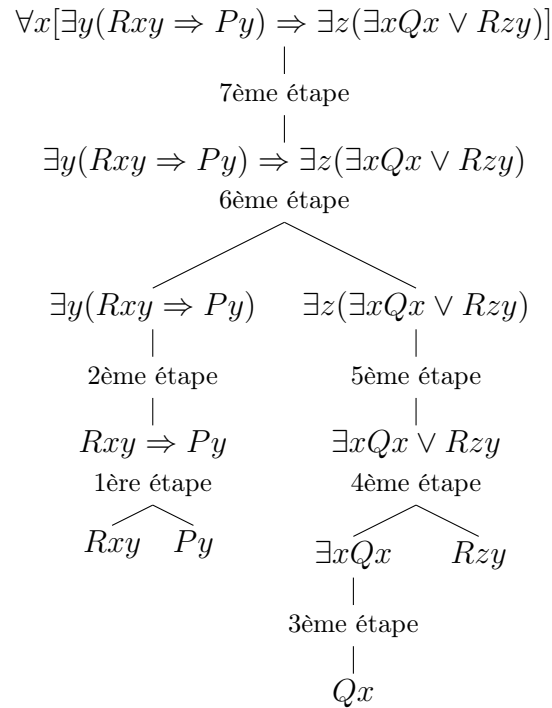
- Par quel quantificateur la variable x , dans la sous-formule " Qx ", est-elle liée ?

$$\forall x[\exists y(Rxy \Rightarrow Py) \Rightarrow \exists z(\exists \underline{\mathbf{x}}Qx \vee Rzy)]$$

- Y a-t-il dans cette formule une ou des variables qui ont des occurrences libres et liées ? si oui, laquelle ou lesquelles ?

y est liée dans la sous-formule $\exists y(Rxy \Rightarrow Py)$ et libre dans la sous-formule $\exists z(\exists xQx \vee Rzy)$.

- Faites l'arbre de décomposition de cette formule.



La formule est donc de degré 7.

2. Soit la formule φ :

$$\forall x[(Px \wedge Pz) \Rightarrow \exists yRxy]$$

Soit maintenant le domaine $D = \{a, b, c, d\}$ et l'interprétation suivante des lettres de prédicat :

$$\mathbf{P} = \{b, d\}$$

$$\mathbf{R} = \{\langle a, b \rangle, \langle d, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle d, b \rangle\}.$$

La formule φ est-elle vraie dans D pour l'interprétation, i , des variables d'individu, définie par :

$$i(x) = c, i(y) = c \text{ et } i(z) = d?$$

$D \models_i \forall x[(Px \wedge Pz) \Rightarrow \exists yRxy]$ ssi pour toute interprétation i' , x -variante de i , $D \models_{i'} (Px \wedge Pz) \Rightarrow \exists yRxy$; comme il y a quatre x -variantes de i , il y a quatre cas à envisager éventuellement.

1. Soit i_1 telle que : $i_1(x) = a$, $i_1(y) = c$ et $i_1(z) = d$, alors :

$D \models_{i_1} (Px \wedge Pz) \Rightarrow \exists yRxy$ ssi (1) $D \not\models_{i_1} Px \wedge Pz$ ou (2) $D \models_{i_1} \exists yRxy$. Il y a donc deux possibilités à envisager (éventuellement) :

– (1) $D \not\models_{i_1} Px \wedge Pz$ ssi $D \not\models_{i_1} Px$ ou $D \not\models_{i_1} Pz$; or $i_1(x) = a \notin \mathbf{P}$, donc $D \not\models_{i_1} Px$ et donc $\boxed{D \not\models_{i_1} Px \wedge Pz}$.

Remarquons pour la beauté de la chose que, comme $i_1(z) = d \in \mathbf{P}$, on a : $D \models_{i_1} Pz$.

– (2) Puisque, comme on vient de le voir, $D \not\models_{i_1} Px \wedge Pz$, il est inutile de considérer l'autre possibilité (2), et on peut conclure tout de suite :

$$\boxed{D \models_{i_1} (Px \wedge Pz) \Rightarrow \exists yRxy}.$$

Remarquons, là encore pour la beauté de la chose que, comme $\langle a, b \rangle \in \mathbf{R}$, si l'on considère l' y -variante i'_1 de i_1 : $i'_1(x) = a$, $i'_1(y) = b$ et $i'_1(z) = d$ (et donc $\langle i'_1(x), i'_1(y) \rangle = \langle a, b \rangle \in \mathbf{R}$), on a : $D \models_{i'_1} Rxy$ et donc $D \models_{i_1} \exists yRxy$.

2. Soit i_2 telle que : $i_2(x) = b$, $i_2(y) = c$ et $i_2(z) = d$, alors :

$D \models_{i_2} (Px \wedge Pz) \Rightarrow \exists yRxy$ ssi (1) $D \not\models_{i_2} Px \wedge Pz$ ou (2) $D \models_{i_2} \exists yRxy$. Il y a donc, comme précédemment, deux possibilités à envisager (éventuellement) :

– (1) $D \not\models_{i_2} Px \wedge Pz$ ssi $D \not\models_{i_2} Px$ ou $D \not\models_{i_2} Pz$; or $i_2(x) = b \in \mathbf{P}$ et $i_2(z) = d \in \mathbf{P}$, donc $D \models_{i_2} Px$ et $D \models_{i_2} Pz$, d'où : $\boxed{D \models_{i_2} Px \wedge Pz}$.

Puisqu'il n'est pas le cas que $D \not\models_{i_2} Px \wedge Pz$, il faut examiner la deuxième possibilité.

– (2) $D \models_{i_2} \exists yRxy$ ssi il existe une interprétation i'_2 , y -variante de i_2 , telle que $D \models_{i'_2} Rxy$. Or on remarque qu'aucune paire ordonnée appartenant à \mathbf{R} n'a pour première projection $i_2(x) = b$; il n'existe donc pas d'interprétation i'_2 , y -variante de i_2 , telle que l'on pourrait avoir $\langle i'_2(x), i'_2(y) \rangle \in \mathbf{R}$ et donc telle que : $D \models_{i'_2} Rxy$. Il en résulte : $\boxed{D \not\models_{i_2} \exists yRxy}$

On a donc montré : $D \models_{i_2} Px \wedge Pz$ et $D \not\models_{i_2} \exists yRxy$, d'où :

$$\boxed{D \not\models_{i_2} (Px \wedge Pz) \Rightarrow \exists yRxy}$$

Il est alors inutile d'examiner les deux autres interprétations possible de x , maintenant que l'on sait que pour l'interprétation i_2 la formule $(Px \wedge Pz) \Rightarrow \exists yRxy$ est fausse dans D ; cela suffit à montrer que l'universelle : $\forall x[(Px \wedge Pz) \Rightarrow \exists yRxy]$ est fausse dans D pour i .

Remarque : l'ordre dans lequel on examine les interprétations x -variantes de i est indifférent. Si, avec un peu de jugeote, on remarque informellement que l'interprétation i_2 ci-dessus rend fausse la formule $(Px \wedge Pz) \Rightarrow \exists yRxy$, on peut commencer le traitement formel de la question par cette interprétation, ce qui évite d'avoir à considérer les autres x -variantes, et conduit rapidement au résultat.

Pour trouver une interprétation des variables d'individu qui rende vraie cette formule dans D , le plus simple est de voir si l'on ne peut rendre faux l'antécédent de l'implication entre crochet, quelle que soit l'interprétation que l'on peut donner à x . Comme l'occurrence de z est libre dans cette formule, il suffit de définir une interprétation i qui donne comme valeur à z un élément de D n'appartenant pas à \mathbf{P} , ce qui rendra la conjonction $Px \wedge Pz$ fausse, quelle que puissent être les interprétations x -variantes de i . Comme ni a , ni c , n'appartiennent à \mathbf{P} , deux interprétations peuvent faire l'affaire, à savoir :

$$\begin{aligned} i_1(x) = c, \quad i_1(y) = c, \quad i_1(z) = a \\ \text{et} \\ i_2(x) = c, \quad i_2(y) = c, \quad i_2(z) = c \end{aligned}$$

Les valeurs données à x et à y par ces interprétations sont totalement indifférentes, puisque ces variables n'ont que des occurrences liées dans la formule.

On vérifie aisément, par ex., que $D \models_{i_2} \forall x[(Px \wedge Pz) \Rightarrow \exists yRxy]$. En effet :

$D \models_{i_2} \forall x[(Px \wedge Pz) \Rightarrow \exists yRxy]$ ssi pour toute interprétation i'_2 , x -variante de i_2 , $D \models_{i'_2} (Px \wedge Pz) \Rightarrow \exists yRxy$.

Soit l'interprétation i'_2 telle que $i'_2(x) = a$, $i'_2(y) = c$, $i'_2(z) = c$, alors :

$$D \models_{i'_2} (Px \wedge Pz) \Rightarrow \exists y Rxy \text{ ssi (1) } D \not\models_{i'_2} Px \wedge Pz \text{ ou (2) } \models_{i'_2} \exists y Rxy.$$

Pour (1) : $D \not\models_{i'_2} Px \wedge Pz$ ssi $D \not\models_{i'_2} Px$ ou $D \not\models_{i'_2} Pz$. Or $i'_2(x) = a \notin \mathbf{P}$ et $i'_2(z) = c \notin \mathbf{P}$, donc $D \not\models_{i'_2} Px$ et $D \not\models_{i'_2} Pz$ et donc $D \not\models_{i'_2} Px \wedge Pz$.

Cela suffit pour établir que $D \models_{i'_2} (Px \wedge Pz) \Rightarrow \exists y Rxy$. Et comme on est assuré de retrouver dans l'examen des autres x -variantes de i_2 ce qui est souligné, et qui suffit pour établir la fausseté de l'antécédent de l'implication, et donc la vérité de l'implication, pour chacune de ces x -variantes de i_2 , on peut faire l'économie de ces examens et conclure tout de suite que : $D \models_{i_2} \forall x [(Px \wedge Pz) \Rightarrow \exists y Rxy]$.

Corrigé des exercices du 3 février 2014

1. Montrez que si, dans un domaine D et pour une interprétation de la lettre de prédicat R , la formule $\forall x Rxx$ est vraie dans D , alors la formule $\forall x, \exists y Rxy$ est également vraie dans D .

Intuitivement les choses sont lumineuses : si l'on admet que $\forall x Rxx$ est vrai dans un domaine D pour une interprétation \mathbf{R} de la lettre de prédicat R , cela signifie que tous les éléments de D entretiennent la relation \mathbf{R} avec eux-mêmes et donc que, quel que soit l'élément, disons a , de D , a entretient la relation \mathbf{R} avec un élément, à savoir, a lui-même ; ce qui rend vraie la formule $\forall x, \exists y Rxy$.

Plus formellement : supposons que $\forall x Rxx$ soit vrai dans un domaine quelconque D pour une interprétation \mathbf{R} de la lettre de prédicat R ($D \models \forall x Rxx$), mais que $\forall x, \exists y Rxy$ soit faux dans D pour la même interprétation \mathbf{R} de R ($D \not\models \forall x, \exists y Rxy$). On aboutit alors à une contradiction.

En effet, si $D \not\models \forall x, \exists y Rxy$, cela signifie que $D \models \sim \forall x, \exists y Rxy$, autrement dit que $D \models \exists x, \forall y \sim Rxy$. Soit a l'élément de D dont cette formule affirme l'existence, on a alors : $D \models \forall y \sim Ray$, et comme il s'agit d'une universelle cela vaut en particulier de a , d'où : $D \models \sim Raa$. Mais comme on a supposé $D \models \forall x Rxx$, cela vaut en particulier de a et donc : $D \models Raa$. D'où contradiction.

On a donc montré que si une relation est (totalement) réflexive, elle est sérielle.

2. Soit un domaine $D : \{a, b, c, d, e\}$, et la relation

$$\mathbf{R} : \{ \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle c, d \rangle, \langle a, e \rangle, \langle b, d \rangle \}.$$

Cette relation est-elle transitive ?

- Intuitivement, pour établir que \mathbf{R} est transitive, il faut s'assurer que, à chaque fois que l'on trouve dans \mathbf{R} deux paires ordonnées de la forme $\langle \alpha, \beta \rangle$ et $\langle \beta, \gamma \rangle$, on y trouve également la paire de la forme $\langle \alpha, \gamma \rangle$. Dans le cas présent, on constate que : $\langle a, c \rangle \in \mathbf{R}$ et $\langle c, d \rangle \in \mathbf{R}$; si \mathbf{R} était transitive, on devrait avoir $\langle a, d \rangle \in \mathbf{R}$, ce qui est bien le cas. Y a-t-il, dans \mathbf{R} , d'autres paires ordonnées de la forme $\langle \alpha, \beta \rangle$ et $\langle \beta, \gamma \rangle$? On constate que ce n'est pas le cas, ce qui permet de conclure que \mathbf{R} est transitive.

Plus formellement, il s'agit de déterminer s'il y a au moins une interprétation de x, y et z dans D rendant fausse la formule : $\forall x, \forall y, \forall z [(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz]$;

autrement dit une interprétation rendant vrai l'antécédent de l'implication ($Rxy \wedge Ryz$) et faux le conséquent (Rxz), autrement dit encore, une interprétation rendant vraies les deux formules Rxy et Ryz et fausse la formule Rxz .

Ce qui a été noté précédemment, revient à dire qu'il n'y a qu'une interprétation i de x , y et z rendant vraies les deux formules Rxy et Ryz , à savoir : $i(x) = a, i(y) = c$ et $i(z) = d$, puisque $\langle i(x), i(y) \rangle = \langle a, c \rangle \in \mathbf{R}$ et $\langle i(y), i(z) \rangle = \langle c, d \rangle \in \mathbf{R}$. Mais cette même interprétation rend vraie la formule Rxz , puisque $\langle i(x), i(z) \rangle = \langle a, d \rangle \in \mathbf{R}$. Pour cette interprétation i , la formule $(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz$ est donc vraie dans D .

Pour toutes les autres interprétations de x, y et z , la conjonction $Rxy \wedge Ryz$ est fausse et donc l'implication est vraie. $(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz$ est donc vraie dans D pour toutes ces autres interprétations.

Il n'y a donc pas d'interprétation rendant fausse la formule $(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz$. Il en résulte que $\forall x, \forall y, \forall z [(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz]$ est vraie dans D .

Ce qui permet de remarquer, de manière plus générale, que si aucune interprétation n'avait rendu vraie la conjonction $Rxy \wedge Ryz$, l'implication aurait été toujours vraie et donc \mathbf{R} aurait été transitive.

- La converse \mathbf{R}^{-1} d'une relation (à deux places) \mathbf{R} contient les mêmes paires d'éléments que \mathbf{R} , à cela près que l'ordre des éléments dans chaque paire est inversé, ce qui donne, dans le cas présent :

$$\mathbf{R}^{-1} : \{ \langle c, a \rangle, \langle d, a \rangle, \langle d, c \rangle, \langle e, a \rangle, \langle d, b \rangle \}.$$

Comme ci-dessus, on s'assure facilement que l'on ne trouve dans \mathbf{R}^{-1} que deux paires de la forme $\langle \alpha, \beta \rangle$ et $\langle \beta, \gamma \rangle$, à savoir $\langle d, c \rangle$ et $\langle c, a \rangle$; et comme $\langle d, a \rangle \in \mathbf{R}^{-1}$, \mathbf{R}^{-1} est bien transitive.

On aurait pu légitimement faire jouer son droit à la paresse (!), en se souvenant du théorème de la théorie des relations : si une relation est transitive, sa converse l'est également.

- Le produit relatif d'une relation \mathbf{R} par une relation \mathbf{Q} ($\mathbf{R}|\mathbf{Q}$) contient toutes les paires de la forme $\langle \alpha, \gamma \rangle$ telles qu'il existe β et que $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbf{R}$ et $\langle \beta, \gamma \rangle \in \mathbf{Q}$. Cela vaut également s'il s'agit du produit relatif d'une relation par elle-même. Dans le cas présent, il est facile de voir que la paire $\langle a, d \rangle$ est dans ce cas, puisqu'il existe un élément à savoir c , tel que $\langle a, c \rangle \in \mathbf{R}$ et $\langle c, d \rangle \in \mathbf{R}$; et il n'y a pas d'autre paire qui satisfasse la condition; ce qui donne :

$$\mathbf{R}|\mathbf{R} : \{ \langle a, d \rangle \}.$$

Corrigé des exercices du 10 février 2014

1. Soit un domaine $D : \{a, b, c, d, e\}$ et la relation \mathbf{R} sur D , telle que :

$$\mathbf{R} = \{ \langle c, d \rangle, \langle e, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle e, d \rangle, \langle d, a \rangle, \langle b, d \rangle \}$$

Cette relation est-elle euclidienne ? Si elle ne l'est pas, ajoutez ou enlevez, des paires d'éléments de D de telle sorte qu'elle soit euclidienne (attention ! il s'agit d'un petit jeu qui ne se termine pas aussi vite qu'on le pense !).

Cette relation n'est pas euclidienne puisque l'on a, par ex., $\langle e, d \rangle, \langle e, b \rangle \in \mathbf{R}$ mais $\langle d, b \rangle \notin \mathbf{R}$, ou bien encore $\langle b, d \rangle, \langle b, c \rangle \in \mathbf{R}$ mais $\langle d, c \rangle \notin \mathbf{R}$, etc.

Pour la deuxième question, la solution la plus simple (pour les paresseux !) est de supprimer au moins l'une de deux paires ayant même première projection. On trouve dans \mathbf{R} $\langle c, d \rangle$ et $\langle c, a \rangle$, on enlève donc l'une des deux, par ex. $\langle c, d \rangle$; de la même manière on trouve $\langle e, b \rangle$ et $\langle e, d \rangle$, on enlève, par ex. $\langle e, b \rangle$. Enfin on trouve $\langle b, c \rangle$ et $\langle b, d \rangle$, on enlève donc $\langle b, c \rangle$ (par ex.). On définit donc \mathbf{R} par : $\mathbf{R} = \{ \langle c, a \rangle, \langle e, d \rangle, \langle d, a \rangle, \langle b, d \rangle \}$.

Ce faisant, on est assuré de ne pas trouver dans \mathbf{R} deux paires de la forme $\langle \alpha, \beta \rangle$ et $\langle \alpha, \gamma \rangle$ et donc l'antécédent de l'implication $(Rxy \wedge Rxz) \Rightarrow Ryz$ n'est vrai pour aucune interprétation dans D des variables x, y et z ; donc l'implication est vraie pour toute interprétation de ces variables et, en conséquence, \mathbf{R} est euclidienne (mais oui ! mais oui !).

2. Faire l'arbre pour le syllogisme en Darapti. Quelle prémisse faut-il ajouter pour que l'arbre ferme ?

Darapti étant de la troisième figure est de la forme :

Tout M est P

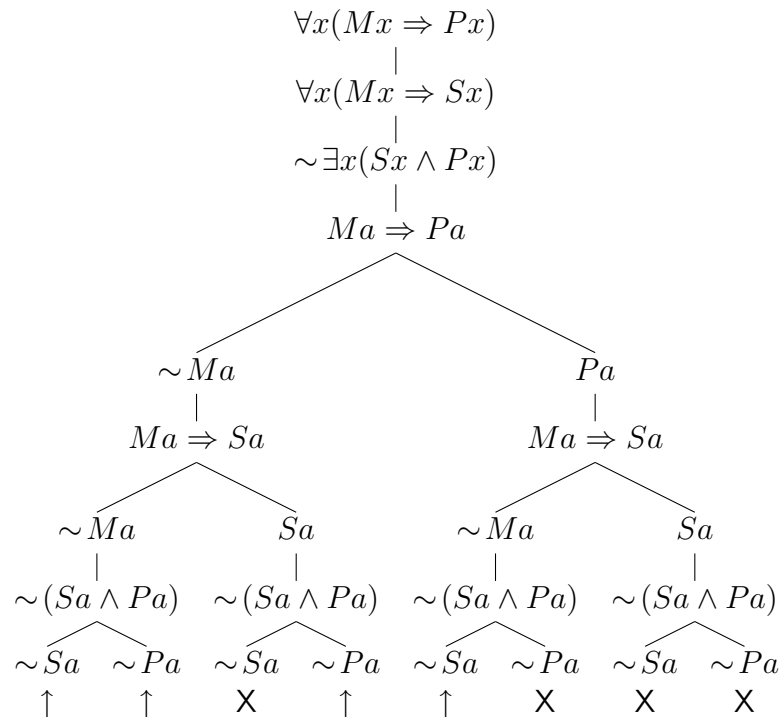
Tout M est S

Quelque S est P

Retranscrit dans l'actuel symbolisme, cela donne :

$$\frac{\forall x(Mx \Rightarrow Px) \quad \forall x(Mx \Rightarrow Sx)}{\exists x(Sx \wedge Px)}$$

Arbre pour cette supposée inférence :



Remarque : on est ici dans une situation particulière puisque les trois formules de départ sont des universelles ; on doit donc les traiter sans avoir pu introduire de constante par le biais d'au moins une existentielle. Dans ce cas on admet quelque chose qui peut sembler logiquement suspect, à savoir que les domaines dans lesquels on interprète nos formules ne sont pas vides, et qu'ils comptent donc au moins un élément (cf. les remarques sur ce sujet à la fin du fascicule sur le calcul des classes).

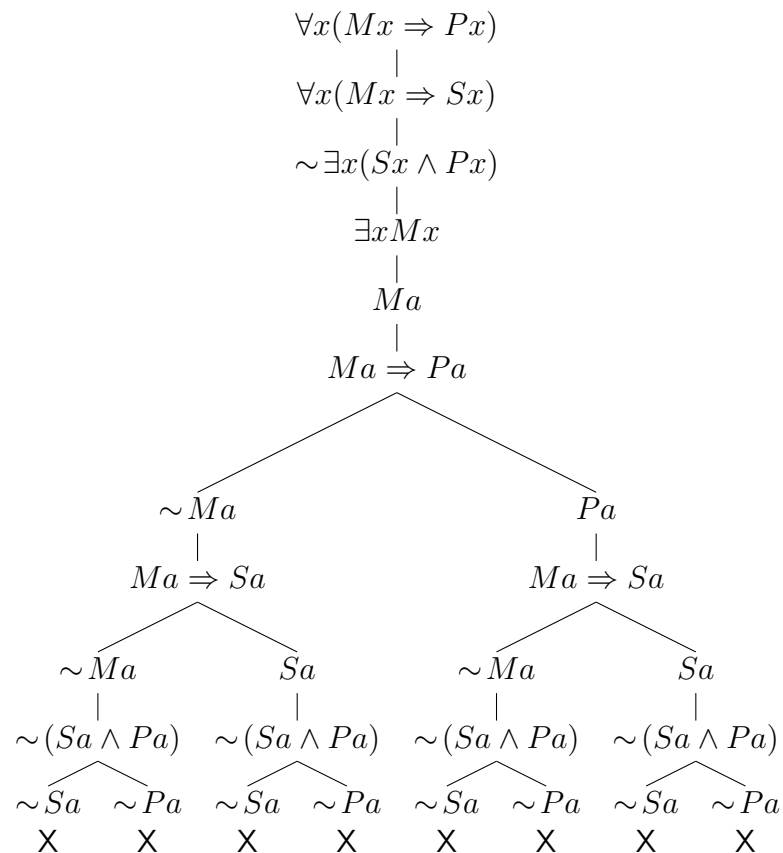
En terme d'arbre, cela revient à admettre que lorsqu'aucune constante n'a été introduite par le biais d'une existentielle et que l'on a à traiter une universelle, on introduit une constante (nouvelle donc) par l'universelle. Ce que l'on a fait ici en introduisant la constante a pour traiter l'universelle $\forall x(Mx \Rightarrow Px)$ (on aurait pu

commencer par traiter l'une des autres universelles, l'ordre ici n'a pas de pertinence logique). Mais une fois introduite une constante, on doit la réutiliser pour traiter les autres universelles et ne plus en introduire d'autres (si aucune existentielle n'apparaît à des étapes ultérieures, ce qui est le cas ici).

On remarque facilement que les branches qui restent ouvertes ont comme caractéristique commune de comporter toutes la formule $\sim Ma$. Ce qui revient à dire que dans un domaine ne comptant qu'un élément, et tel que cet unique élément n'appartient pas à **M**, la formule correspondant à *Darapti* est fausse, si cet élément n'appartient pas simultanément à **S** et à **P**.

Cela ne fait qu'exprimer le fait que les deux prémisses universelles du *Darapti* peuvent être vraies pour la seule (mauvaise?) raison que rien n'est **M**, alors que la conclusion est fausse pour la simple raison que rien n'est à la fois **S** et **P**. Rappelons que si Aristote (et la tradition à sa suite) avait admis que *Darapti* est valide, c'est parce qu'il admettait que les universelles ont ce qu'on appelle un "import existentiel" ; ce signifie qu'il admettait qu'une universelle de la forme "tout S est P" ne pouvait être vraie que s'il existait au moins un objet qui était **S**. Au contraire, dans le contexte de la logique contemporaine, une "implication formelle" (comme disait Russell) de la forme $\forall x(Sx \Rightarrow Px)$, - qui traduit l'universelle d'Aristote - est vraie lorsque rien n'est **S**, ce qui implique, par ex., que la proposition "toute licorne est un licorne" est parfaitement vraie.

En conséquence, pour rendre sa validité à *Darapti*, il faut ajouter la prémisses $\exists xMx$ ce qui donnera l'arbre suivant :



3. Pouvez-vous définir sur un domaine $D : \{a, b, c, d\}$, deux relations \mathbf{R} et \mathbf{S} , l'une et l'autre à deux places, et telles que :

1. \mathbf{S} est une sous-relation de \mathbf{R} ,
2. \mathbf{R} est transitive,
3. \mathbf{S} n'est pas transitive.

Qu'en concluez-vous quant à la validité de la formule :

$$\left\{ \forall x, \forall y (Sxy \Rightarrow Rxy) \wedge \forall x, \forall y, \forall z [(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz] \right\} \Rightarrow \\
\forall x, \forall y, \forall z [(Sxy \wedge Syz) \Rightarrow Sxz]$$

Puisque \mathbf{S} n'est pas transitive, deux paires de la forme $\langle \alpha, \beta \rangle$ et $\langle \beta, \gamma \rangle$ appartiennent à \mathbf{S} mais pas une paire de la forme $\langle \alpha, \gamma \rangle$; comme $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{R}$, les deux premières paires de la forme $\langle \alpha, \beta \rangle$ et $\langle \beta, \gamma \rangle$ appartiennent à \mathbf{R} et comme \mathbf{R} est transitive, il faut que la paire de la forme $\langle \alpha, \gamma \rangle$ appartienne également à \mathbf{R} .

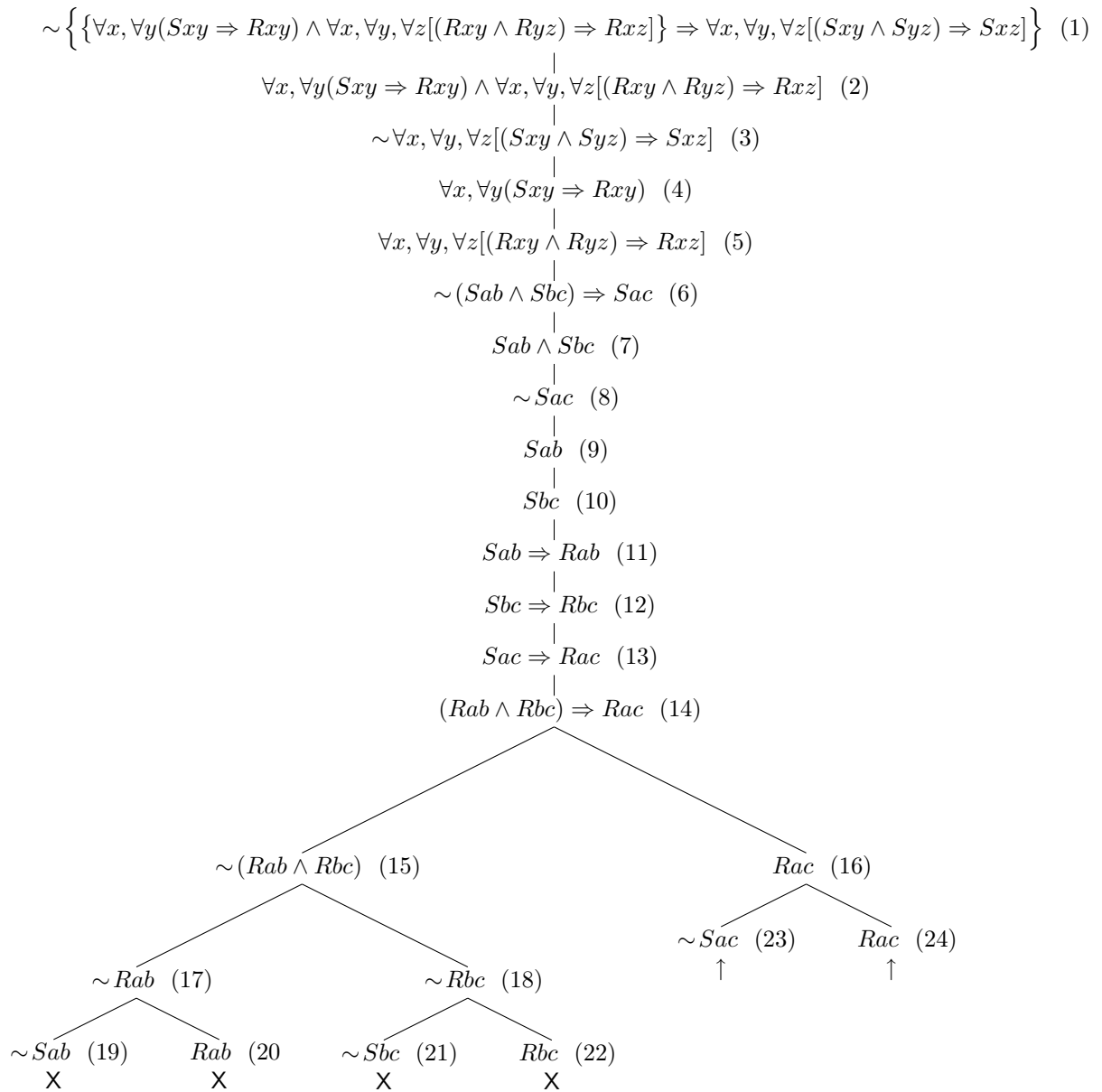
On peut donc, minimalement, définir \mathbf{S} par : $\mathbf{S} = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle \}$ et \mathbf{R} par : $\mathbf{R} = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle \}$. Tout comme on aurait pu définir \mathbf{S} par : $\mathbf{S} = \{ \langle b, d \rangle, \langle d, c \rangle \}$ et \mathbf{R} par : $\mathbf{R} = \{ \langle b, d \rangle, \langle d, c \rangle, \langle b, c \rangle \}$, etc.

Il résulte de ce qui précède que

$$\{ \forall x, \forall y (Sxy \Rightarrow Rxy) \wedge \forall x, \forall y, \forall z [(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz] \} \Rightarrow \forall x, \forall y, \forall z [(Sxy \wedge Syz) \Rightarrow Sxz]$$

n'est pas valide, puisque pour ces définitions de \mathbf{R} et de \mathbf{S} , cette formule est clairement fautive dans le domaine D . Intuitivement, l'implication "dit" que si une relation \mathbf{S} est une sous-relation d'une relation \mathbf{R} transitive alors \mathbf{S} est transitive; or on vient de voir qu'une sous-relation d'une relation transitive peut ne pas être, elle-même, transitive, ce qui va donc à l'encontre de ce que "dit" l'implication.

Pour s'amuser, on peut faire l'arbre pour cette formule :



On constate facilement que la situation que décrivent les deux branches ouvertes est précisément celle que l'on a imaginée précédemment, à savoir : $D = \{a, b, c\}$, $\mathbf{S} = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle \}$ et $\mathbf{R} = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle \}$. Attention, cet arbre, pour des raisons de place, est très simplifié et n'est pas du tout complet !

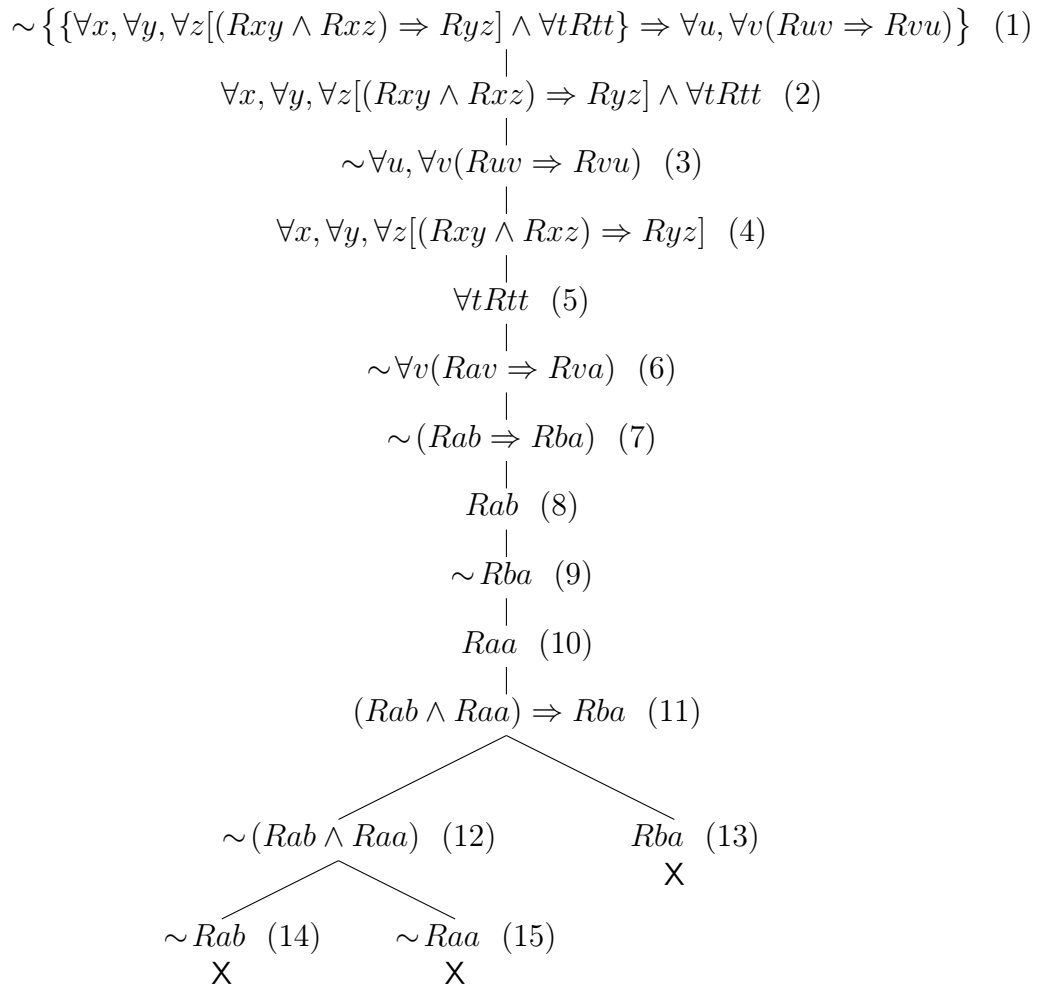
Corrigé du premier exercice du 24 février 2014

1. Faire l'arbre pour la formule exprimant qu'une relation euclidienne et totalement réflexive est symétrique (attention, il faut réfléchir avant d'agir!).

La formule exprimant qu'une relation euclidienne et totalement réflexive est symétrique est :

$$\{\forall x, \forall y, \forall z [(Rxy \wedge Rxz) \Rightarrow Ryz] \wedge \overset{\text{réflexivité}}{\forall t Rtt} \} \Rightarrow \overset{\text{symétrie}}{\forall u, \forall v (Ruv \Rightarrow Rvu)}$$

Arbre pour cette formule :



Explications : (2), (3) sur (1) par la règle " $\sim \Rightarrow$ "; (4), (5) sur (2), par la règle " \wedge "; (6) sur (3) et (7) sur (6) par la règle " $\sim \forall$ "; (8), (9) sur (7), par la règle " $\sim \Rightarrow$ "; (10) sur (5) par la règle " \forall " (voir ci-après l'explication du choix de la constante); (11) sur (4), par trois applications successives de la règle " \forall " (voir ci-après l'explication du choix des constantes); (12), (13), sur (11), par la règle " \Rightarrow "; (14), (15), sur (12), par la règle " $\sim \wedge$ ".

Explications complémentaires :

- On s'est permis, pour des raisons de place, de télescoper les trois applications de la règle \forall à la formule (4) qui donnent la formule (11), en toute rigueur, on aurait dû avoir :

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 | \\
 \forall x, \forall y, \forall z [(Rxy \wedge Rxz) \Rightarrow Ryz] \quad (4) \\
 | \\
 \vdots \\
 | \\
 \forall y, \forall z [(Ray \wedge Raz) \Rightarrow Ryz] \quad (11) \\
 | \\
 \forall z [(Rab \wedge Raz) \Rightarrow Rbz] \quad (11') \\
 | \\
 (Rab \wedge Raa) \Rightarrow Rba \quad (11'') \\
 | \\
 \vdots
 \end{array}$$

- On aurait pu s'abstenir de commencer par la négation de la formule exprimant qu'une relation euclidienne et totalement réflexive est symétrique et débiter directement l'arbre en posant les unes sous les autres les formules exprimant qu'une relation est euclidienne puis celle exprimant qu'elle est totalement réflexive et enfin celle exprimant qu'elle n'est pas symétrique; autrement dit les formules (4), (5) et (3). On aurait ainsi évité d'avoir à écrire les formules (1) et (2).

- Pour choisir les constantes utilisées pour les universelles, on peut raisonner

comme suit : on suppose que R n'est pas symétrique, ce qui revient à admettre que dans un domaine D , il y a au moins deux objets, a et b tels que : a est dans la relation R avec b (i.e. Rab) mais b n'est pas dans la relation R avec a (i.e. $\sim Rba$). C'est ce à quoi on arrive dans l'arbre avec les formules (8) et (9). On se demande alors si ces données sont compatibles avec le fait que R est à la fois euclidienne et totalement réflexive. Plus précisément cela revient à se demander si de Rab , on ne peut tirer Rba en jouant de l'euclidiannité et de la réflexivité de R .

Il suffit d'observer que si, en plus de Rab , on avait Raa , il s'ensuivrait, par l'euclidiannité de R , Rba ; et comme R est réflexive cela est tout à fait possible. D'où le choix des constantes lors de l'application de la règle \forall aux formules (4) et (5).

L'arbre alors fermera puisque des deux possibilités rendant vraie $(Rab \wedge Raa) \Rightarrow Rba$, à savoir : $(Rab \wedge Raa)$ fausse, ou Rba vraie, la première est exclue du fait que l'on a admis Rab et que la réflexivité de R a conduit à poser Raa , et la seconde l'est tout autant puisque la supposition que R n'est pas symétrique à conduit à admettre $\sim Rab$. Il est donc impossible que R soit euclidienne et réflexive, mais pas symétrique; ce qu'exprime le fait que l'arbre ferme.

Remarque pour apaiser les consciences malheureuses : en toute rigueur, on ne devrait pas dire des choses comme " R est euclidienne", " R est totalement réflexive", etc., car R n'est qu'une lettre de prédicat (à deux places) qui n'a aucune propriété de ce genre. Ce qui est euclidien ou réflexif, etc. c'est la relation **R**, *interprétation* de R dans le domaine D que l'on essaye de construire (sans succès ici). Il s'agit donc d'un abus de langage, mais qui permet d'éviter des lourdeurs inutiles si l'on convient de comprendre ces expressions inexactes comme disant : l'interprétation **R** de R est euclidienne, etc.

Corrigé des exercices du 3 et 10 mars 2014

1. Soit un domaine $D = \{a_1, a_2, a_3\}$ et la relation à deux places

$$\mathbf{R} = \{ \langle a_2, a_1 \rangle, \langle a_3, a_3 \rangle, \langle a_2, a_3 \rangle \}.$$

On admet que le langage \mathcal{L} est étendu au langage $\mathcal{L} \cup C_D$, avec $C_D = \{c_1, c_2, c_3\}$. Soit i une interprétation des variables d'individu telle que $i(x) = a_1$ et $i(y) = a_3$. Les formules élémentaires suivantes sont-elles vraies dans D pour i :

$$Rx, c_2, \quad Rc_2, c_3, \quad Ry, x?$$

Puisque $\langle i(x), a_2 \rangle = \langle a_1, a_2 \rangle \notin \mathbf{R}$, $D \not\models_i Rx, c_2$.

Puisque $\langle a_2, a_3 \rangle \in \mathbf{R}$, $D \models_i Rc_2, c_3$.

Puisque $\langle i(y), i(x) \rangle = \langle a_3, a_1 \rangle \notin \mathbf{R}$, $D \not\models_i Ry, x$.

Les formules suivantes sont-elles vraies dans D pour i :

$$\exists x Rc_3, x, \quad \forall y Rc_2, y?$$

Puisqu'il existe une constante, à savoir c_3 , telle que $\langle a_3, a_3 \rangle \in \mathbf{R}$, on a : $D \models_i Rc_3, c_3$ et donc : $D \models_i \exists x Rc_3, x$.

Puisqu'il existe une constante, à savoir c_2 , telle que $\langle a_2, a_2 \rangle \notin \mathbf{R}$, on a $D \not\models_i Rc_2, c_2$ et donc : $D \not\models_i \forall y Rc_2, y$.

2. Montrez que la formule $\forall x(Px \vee Qx) \Rightarrow (\forall xPx \vee \forall xQx)$ est valide dans un domaine ne comptant qu'un élément mais qu'en revanche elle ne l'est pas dans un domaine comptant deux éléments.

- Soit $D = \{a\}$. Supposons $D \models \forall x(Px \vee Qx)$; on montre qu'alors $D \models \forall xPx \vee \forall xQx$.

En effet, puisque $D \models \forall x(Px \vee Qx)$, on a alors, pour l'unique interprétation $i(x) = a$, $D \models_i Px \vee Qx$ et donc $D \models_i Px$ ou $D \models_i Qx$. Comme il n'y a pas d'autres interprétations de x , il s'ensuit que $D \models \forall xPx$ ou $D \models \forall xQx$ et donc : $D \models \forall xPx \vee \forall xQx$.

- Soit $D = \{a, b\}$ et soit l'interprétation des lettres de prédicat P et Q , $\mathbf{P} = \{a\}$ et $\mathbf{Q} = \{b\}$ respectivement.

On a alors, pour l'interprétation $i(x) = a$, $D \models_i Px$ (puisque $a \in \mathbf{P}$) et donc : $D \models_i Px \vee Qx$. De la même manière, pour l'interprétation $i'(x) = b$, $D \models_{i'} Qx$ (puisque $b \in \mathbf{Q}$) et donc : $D \models_{i'} Px \vee Qx$. Comme il n'y a pas d'autres interprétations de x , on en tire : $D \models \forall x(Px \vee Qx)$.

Toutefois, dans ces conditions $D \not\models \forall xPx$, puisque pour l'interprétation $i'(x) = b$, comme $b \notin \mathbf{P}$, $D \not\models_{i'} Px$. De la même manière, $D \not\models \forall xQx$, puisque pour l'interprétation $i(x) = a$, comme $a \notin \mathbf{Q}$, $D \not\models_i Qx$. Il en résulte : $D \not\models \forall xPx \vee \forall xQx$.

Ainsi, pour cette interprétation des lettres de prédicat, l'antécédent de l'implication est vrai dans D , mais le conséquent est faux dans D , et donc :

$$D \not\models \forall x(Px \vee Qx) \Rightarrow (\forall xPx \vee \forall xQx)$$

Puisqu'il existe une interprétation des lettres de prédicat dans $\wp(D)$ (avec $D = \{a, b\}$) pour laquelle cette formule est fausse, on en conclut que cette formule n'est pas valide dans un domaine comptant deux éléments.

On peut s'amuser à faire l'arbre pour cette formule, ce qui donne :

$$\begin{array}{c}
 \sim [\forall x(Px \vee Qx) \Rightarrow (\forall xPx \vee \forall xQx)] \\
 | \\
 \forall x(Px \vee Qx) \\
 | \\
 \sim (\forall xPx \vee \forall xQx) \\
 | \\
 \sim \forall xPx \\
 | \\
 \sim \forall xQx \\
 | \\
 \sim Pb \\
 | \\
 \sim Qa \\
 | \\
 Pa \vee Qa \\
 | \\
 Pb \vee Qb \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 Pa \quad Qa \\
 \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\
 Pb \quad Qb \quad Pb \quad Qb \\
 \times \quad \uparrow \quad \times \quad \times
 \end{array}$$

De la branche ouverte, on tire un domaine et une interprétation des lettres de prédicat P et Q identiques à ce que l'on avait posé auparavant, à savoir : $D = \{a, b\}$, $\mathbf{P} = \{a\}$ et $\mathbf{Q} = \{b\}$.

3. *Ecrire la formule exprimant qu'une relation à deux places, \mathbf{S} , est la converse de la converse d'une relation à deux places \mathbf{R} . Montrez que $\mathbf{S} = \mathbf{R}$.*

Soit R et S les lettres de prédicat interprétées par \mathbf{R} et \mathbf{S} respectivement ; et T la lettre de prédicat interprétée par \mathbf{T} la converse de \mathbf{R} .

Que \mathbf{T} soit la converse de \mathbf{R} est exprimé par la formule : $\forall x, \forall y (Rxy \Leftrightarrow Tyx)$.

Que \mathbf{S} soit la converse de \mathbf{T} est exprimé par la formule : $\forall x, \forall y (Txy \Leftrightarrow Syx)$.

Que \mathbf{S} soit la converse de la converse de \mathbf{R} s'exprime en faisant la conjonction de ces deux formules : $\forall x, \forall y (Rxy \Leftrightarrow Tyx) \wedge \forall x, \forall y (Txy \Leftrightarrow Syx)$.

Maintenant, $\mathbf{R} = \mathbf{S}$ est exprimé par la formule : $\forall x, \forall y (Rxy \Leftrightarrow Sxy)$.

Il s'agit donc de montrer que la formule suivante est universellement valide :

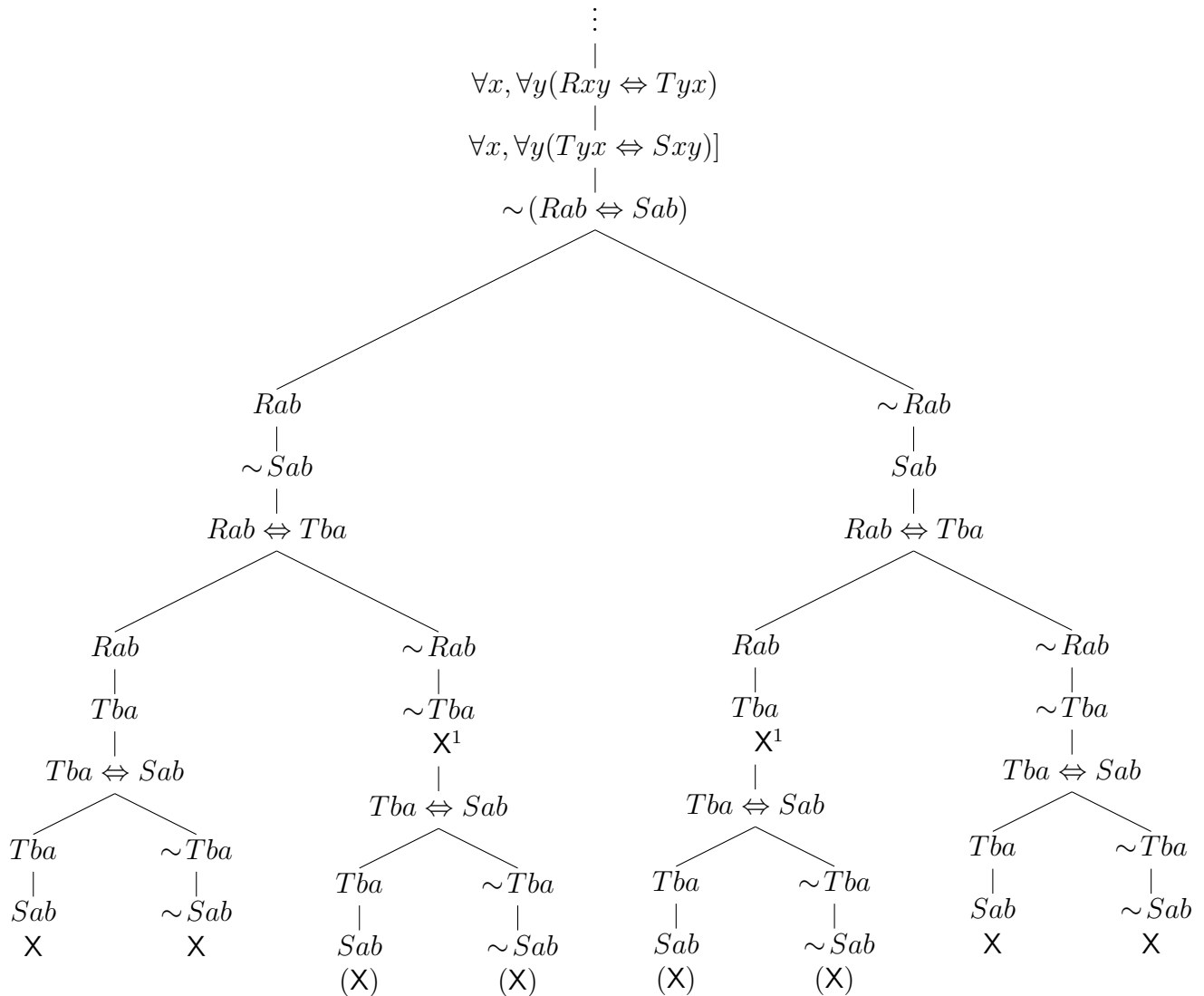
$$[\forall x, \forall y (Rxy \Leftrightarrow Tyx) \wedge \forall x, \forall y (Txy \Leftrightarrow Syx)] \Rightarrow \forall x, \forall y (Rxy \Leftrightarrow Sxy)$$

On peut raisonner informellement par l'absurde pour montrer que cette formule est universellement valide. Supposons que $\forall x, \forall y (Ryz \Leftrightarrow Syz)$ soit faux dans un domaine D quelconque, autrement dit qu'il existe au moins deux objets $a, b \in D$, tels que $D \models \sim (Rab \Leftrightarrow Sab)$. Cela signifie ou bien $D \models Rab \wedge \sim Sab$, ou bien $D \models \sim Rab \wedge Sab$. Est-ce compatible avec $D \models \forall x, \forall y (Rxy \Leftrightarrow Tyx)$ et $D \models \forall x, \forall y (Txy \Leftrightarrow Sxy)$?

Considérons $D \models Rab \wedge \sim Sab$, autrement dit $D \models Rab$ et $\boxed{D \models \sim Sab}$. Comme $D \models \forall x, \forall y (Rxy \Leftrightarrow Tyx)$, cela vaut en particulier pour $x \rightarrow a$ et $b \rightarrow y$ et donc $D \models Rab \Leftrightarrow Tba$, d'où, puisque $D \models Rab$: $D \models Tba$; et comme $D \models \forall x, \forall y (Txy \Leftrightarrow Syx)$, cela vaut en particulier pour $x \rightarrow b$ et $y \rightarrow a$ et donc : $D \models Tba \Leftrightarrow Sab$, d'où, puisque $D \models Tba$: $\boxed{D \models Sab}$. Contradiction.

On voit facilement qu'exactement la même démarche conduirait également à une contradiction à partir de $D \models \sim Rab \wedge Sab$.

Si l'on fait l'arbre pour cette formule en suivant les indications ci-dessus pour les applications de la règle " \forall ", on retrouve ces mêmes contradictions (pour aller plus vite, on saute les premières étapes évidentes) :



¹ Chacune de ces deux branches pourrait être fermée dès cette étape, ce qui correspond au fait que l'on n'a pas envisagé ces possibilités dans le raisonnement informel précédent. En effet, si par ex., comme sur la branche de gauche, on suppose Rab , et $Rab \Leftrightarrow Tba$, il est immédiatement contradictoire de supposer que la bi-implication pourrait être vraie dans le domaine D en construction du fait que ses deux membres sont faux dans D puisque précisément on vient d'admettre que l'un d'eux est vrai dans D . Même chose pour la branche de droite.

Corrigé du premier exercice du 17 mars 2024

1. Exprimez dans le symbolisme logique les deux phrases suivantes (en faisant : $Px = x$ est une peinture, $Cx = x$ est un critique d'art et $Rxy = x$ admire y) :

- φ : Tous les critiques d'art admirent au moins une peinture.
- ψ : Il y a une peinture que tous les critiques d'art admirent.

$\varphi \Rightarrow \psi$ est-elle valide ? $\psi \Rightarrow \varphi$ est-elle valide ? Faites les arbres correspondant.

- φ est de la forme : « Tous les C sont ... », ou si l'on veut : « Tous les C sont [admirateurs d'au moins une peinture] » ; autrement dit, cela ressemble (!) à une universelle affirmative d'Aristote, ce qui se traduit par : $\forall x[Cx \Rightarrow \dots]$.

Le (petit) problème est de transcrire « [admirateurs d'au moins une peinture] » et de faire apparaître la relation enveloppée : « x est un admirateur d'au moins une peinture » signifie qu'il existe quelque chose, qui est une peinture, et que x admire, d'où : $\exists y(Py \wedge Rxy)$, et c'est ce qui vient à la place des trois petits points de la formule précédente, ce qui donne pour finir :

$$\varphi : \forall x[Cx \Rightarrow \exists y(Py \wedge Rxy)]$$

ce qui peut se lire : si quelque chose, disons x , est un critique d'art, alors il existe une chose, disons y , qui est une peinture et x admire y .

- ψ est de la forme : « Il existe une P qui ... », ou, si l'on veut : « Il existe une P qui [est admirée par tous les critiques d'art] » ; autrement dit cela ressemble (!) à une particulière affirmative d'Aristote, ce qui se traduit par : $\exists x[Px \wedge \dots]$

Le (petit) problème est, là encore, de transcrire « [est admirée par tous les critiques d'art] » et de faire apparaître la relation enveloppée : « x est admirée par tous les critiques d'art » signifie la même chose que « tous les critiques d'art admirent x », ce qui veut dire : quel que soit y , si y est un critique d'art, alors y admire x , d'où : $\forall y(Cy \Rightarrow Ryx)$, et c'est ce qui vient à la place des trois petits points de la formule précédente, ce qui donne pour finir :

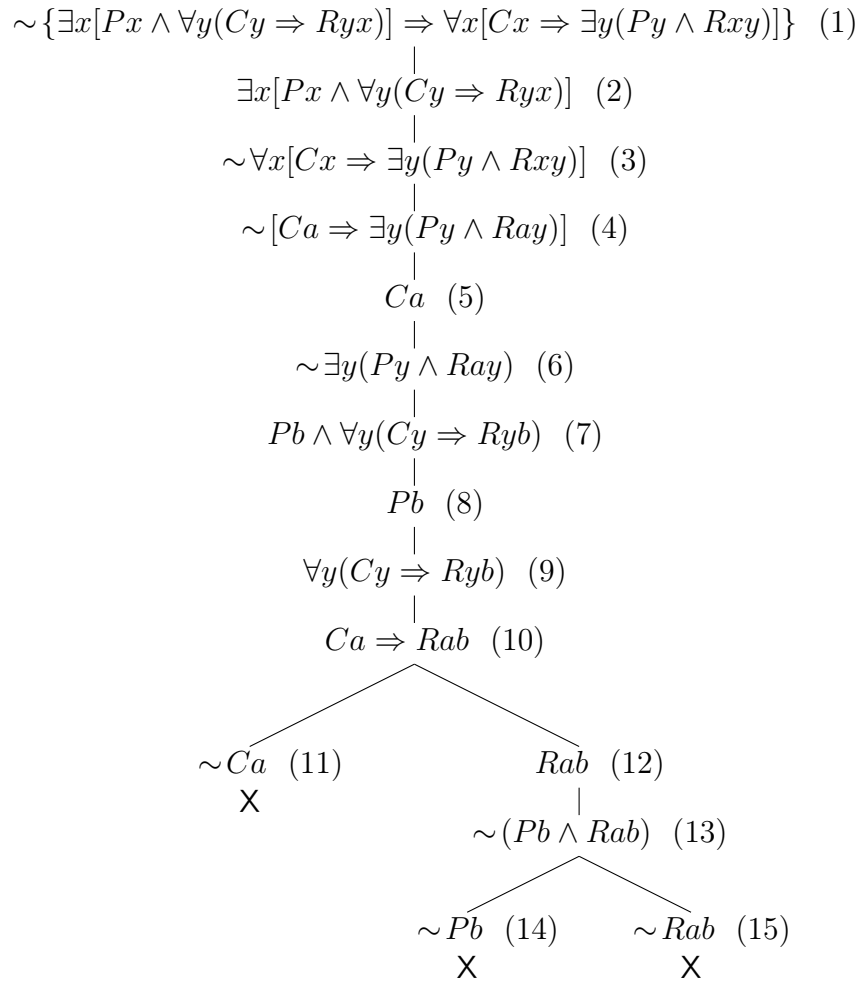
$$\psi : \exists x[Px \wedge \forall y(Cy \Rightarrow Ryx)]$$

- $\varphi \Rightarrow \psi$ est-elle valide? Informellement, cela signifierait quelque chose comme : si tous les critiques d'art admirent au moins une peinture, alors il y en a une, disons la *Joconde*, qu'ils admirent tous. Mais il est clair que cela ne vaut rien : supposons qu'il n'y ait que trois critiques d'art, Pierre, Paul et Jacques et deux peintures, la *Joconde* et la *Ronde de nuit* ; et que Pierre et Jacques admirent la *Joconde*, mais pas la *Ronde de nuit* et Paul, la *Ronde de nuit* mais pas la *Joconde*.

En ce cas il est bien vrai que tous les critiques d'art admirent au moins une peinture ($\rightarrow \varphi$ est vrai), mais il est parfaitement faux qu'ils admirent la même peinture ($\rightarrow \psi$ est faux).

- $\psi \Rightarrow \varphi$ est-elle valide? Informellement, cela signifie que s'il y a une peinture que tous les critiques d'art admirent, alors, *a fortiori*, ils en admirent tous au moins une, ce qui est parfaitement raisonnable!

Arbre pour $\psi \Rightarrow \varphi$ (voir page suivante) :



Règles suivies : (2), (3) sur (1) par « $\sim \Rightarrow$ » ; (4) sur (3) par « $\sim \forall$ » ; (5), (6) sur (4) par « $\sim \Rightarrow$ » ; (7) sur (2) par « \exists » ; (8), (9) sur (7) par « \wedge » ; (10) sur (9) par « \forall » ; (11), (12) sur (10) par « \Rightarrow » ; (13) sur (6) par « $\sim \exists$ » ; (14), (15) sur (13) par « $\sim \wedge$ ».

Remarque : on aurait pu traiter d'abord la formule (2) qui est également une existentielle comme (3), le choix est ici indifférent. A titre d'exercice, faites l'arbre en traitant d'abord (2).

Le choix des constantes pour traiter les universelles (9) puis (6) peut se justifier ainsi : (9) « dit » que tout critique d'art admire une peinture b (cf. (8)) ; or on sait que a est un critique d'art (cf. (5)) ; il est donc raisonnable de reprendre la constante a , ce qui conduit à (10) : si a est un critique d'art, alors a admire b et donc : ou bien a n'est pas un critique d'art (cf. (11)), ce qui est exclu par (5) (d'où la fermeture à gauche), ou bien le critique d'art a admire la peinture b (cf. (12)).

Mais (6) « dit » que a n'admire aucune peinture ; il est donc raisonnable de reprendre la constante b pour traiter la formule (6), ce qui donne (13) : « b est une peinture et a admire b » est faux, d'où : ou bien b n'est pas une peinture (14) ce qui contredit (8) ; ou bien a n'admire pas b , ce qui contredit (12).

Corrigé du deuxième exercice du 17 mars 2024 (24 mars 2014)

2. Transcrivez dans le symbolisme logique la phrase :

- Rien n'est identique à rien.

Rien n'est identique à a : $\sim \exists x(x = a)$

a n'est identique à rien : $\sim \exists y(a = y)$,

d'où : rien n'est identique à rien :

$\sim \exists x, \sim \exists y(x = y)$

Cet énoncé est-il "vrai" ?

Oui, évidemment ! $\sim \exists x, \sim \exists y(x = y)$ est équivalent à : $\forall x \sim \sim \exists y(x = y)$, qui est équivalent à $\forall x, \exists y(x = y)$; ce qui est parfaitement vrai puisque, quel que soit x , il existe bien quelque chose qui lui est identique, à savoir x lui-même : $x = x$ (réflexivité de l'identité).

Il est peut-être plus intuitif de considérer une proposition comme « Personne n'aime personne », autrement dit « Tout le monde aime au moins une personne ». Mais il n'est pas sûr que cette dernière proposition soit vraie. . .

Corrigé de l'exercice du 31 mars 2014.

Transcrire dans le symbolisme logique les propositions suivantes, en faisant « x est un philosophe » : Px et « x contredit y » : Cxy . Montrez, en faisant l'arbre, que la deuxième suit de la première.

*Il y a un philosophe que tous les philosophes contredisent
ergo : Il y a un philosophe qui se contredit.*

- Il y a un philosophe que tous les philosophes contredisent :

$$\exists x[Px \wedge \forall y(Py \Rightarrow Cyx)]$$

Autrement dit : il existe un truc qui est philosophe et est tel que tous les machins qui sont philosophes le contredisent.

- Il y a un philosophe qui se contredit :

$$\exists x(Px \wedge Cxx)$$

Autrement dit : il existe un truc qui est philosophe et qui se contredit.

Arbre pour $\exists x[Px \wedge \forall y(Py \Rightarrow Cyx)] \Rightarrow \exists x(Px \wedge Cxx)$

$$\sim \{ \exists x [Px \wedge \forall y (Py \Rightarrow Cyx)] \Rightarrow \exists x (Px \wedge Cxx) \} \quad (1)$$

$$\exists x [Px \wedge \forall y (Py \Rightarrow Cyx)] \quad (2)$$

$$\sim \exists x (Px \wedge Cxx) \quad (3)$$

$$Pa \wedge \forall y (Py \Rightarrow Cya) \quad (4)$$

$$Pa \quad (5)$$

$$\forall y (Py \Rightarrow Cya) \quad (6)$$

$$Pa \Rightarrow Caa \quad (7)$$

$$\begin{array}{l} \sim Pa \quad (8) \\ \times \end{array}$$

$$Caa \quad (9)$$

$$\sim (Pa \wedge Caa) \quad (10)$$

$$\begin{array}{l} \sim Pa \quad (11) \\ \times \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sim Caa \quad (12) \\ \times \end{array}$$

Règles suivies : (2), (3) sur (1) par la règle « $\sim \Rightarrow$ » ; (4) sur (2), par la règle « \exists » ; (5), (6) sur (4), par la règle « \wedge » ; (7) sur (6), par la règle « \forall » ; (8), (9) sur (7), par la règle « \Rightarrow » ; (10) sur (3), par la règle « $\sim \exists \sim$ » ; (11), (12) sur (10), par la règle « $\sim \wedge$ ».

Arbre particulièrement facile, puisqu'une seule constante a été introduite par l'existentielle (2).

Comme toujours, on aurait pu commencer l'arbre directement par les formules (2) et (3).