Corrigé des exercices

Corrigé des exercices du 19 sept. 2013

1. *Tables de vérité pour $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$ et $p \Leftrightarrow q$:*

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

2. *Equivalences ; réécrire les formules suivantes*

en utilisant $\wedge$ *et* $\sim$:	*en utilisant* $\vee$ *et* $\sim$:	*en utilisant* $\Rightarrow$ *et* $\sim$:
$p \vee q \quad \rightarrow \quad \sim(\sim p \wedge \sim q)$	$p \wedge q \quad \rightarrow \quad \sim(\sim p \vee \sim q)$	$p \wedge q \quad \rightarrow \quad \sim(p \Rightarrow \sim q)$ $\rightarrow \quad \sim(q \Rightarrow \sim p)$
$p \Rightarrow q \quad \rightarrow \quad \sim(p \wedge \sim q)$	$p \Rightarrow q \quad \rightarrow \quad \sim p \vee q$	$p \vee q \quad \rightarrow \quad \sim p \Rightarrow q$ $\rightarrow \quad \sim q \Rightarrow p$

en utilisant $\wedge$ et $\Rightarrow$: $p \Leftrightarrow q \longrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

3. *Faire la table de vérité de la formule suivante :*

$$[(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$$

p	q	r	$[(p \Rightarrow r)$	$\vee$	$(q \Rightarrow r)]$	$\Rightarrow$	$[(p \vee q)$	$\Rightarrow$	$r]$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V	V	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	F	V	F

Est-ce une tautologie ? une formule neutre ? une contradiction ?
Cette formule est fausse pour les interprétations i et i' telles que : $i(p) = \text{V}$, $i(q) = \text{F}$, $i(r) = \text{F}$ et $i'(p) = \text{F}$, $i'(q) = \text{V}$, $i'(r) = \text{F}$, et vraie pour toutes les autres interprétations ; c'est donc une formule neutre.

4. *Les inférences suivantes sont-elle valides ? pourquoi ?*
   - Si la vie ne vaut pas la peine d'être vécue, alors il est bon de manger de la tarte à la fraise
   donc :
   - Si la vie vaut la peine d'être vécue, alors il n'est pas bon de manger de la tarte à la fraise

   Cette inférence n'est pas valide : si "la vie vaut la peine d'être vécue" et "il est bon de manger de la tarte à la fraise" sont vrais, la prémisse est vraie (puisque $\text{F} \Rightarrow \text{V} = \text{V}$) et la conclusion, fausse (puisque $\text{V} \Rightarrow \text{F} = \text{F}$). Ce qui correspond au fait que la formule $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow \sim q)$ n'est pas une tautologie.

   Par contre, l'inférence :
   - Si la vie ne vaut pas la peine d'être vécue, alors il est bon de manger de la tarte à la fraise
   donc :
   - S'il n'est pas bon de manger de la tarte à la fraise, alors la vie vaut la peine d'être vécue

   est valide et correspond à la "loi" de contraposition sous la forme : $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow p)$

- Pierre fume si et seulement si Pierre est un irresponsable
donc :
- Pierre n'est pas un irresponsable si et seulement si Pierre ne fume pas

Cette inférence est valide : si la prémisse est vraie, c'est que les deux membres de la bi-implication ("ssi" dans le métalangage) sont tous les deux vrais ou tous les deux faux ; dans ces conditions les deux membres de la bi-implication conclusion sont également tous les deux faux ou tous les deux vrais. On ne peut donc avoir prémisse = V et conclusion = F. Ce qui correspond à la "loi" de contraposition généralisée : $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow ({\sim}p \Leftrightarrow {\sim}q)$ (et même : $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ({\sim}p \Leftrightarrow {\sim}q)$)

- Si 2 + 2 = 5, alors le père Noël existe
- Si le Soleil tourne autour de la Terre, alors 2 + 2 = 5
donc
- Si le Soleil tourne autour de la Terre, alors le père Noël existe

Cette inférence est également valide, : si "si le Soleil tourne autour de la Terre, alors le père Noël existe" était faux, alors "le Soleil tourne autour de la Terre" serait vrai et "le père Noël existe", faux. En ce cas, les deux prémisses ne peuvent être simultanément vraies puisque, pour que la première soit vraie, il faudrait que "2 + 2 = 5" soit faux, ce qui alors rend la seconde prémisse fausse (même genre de raisonnement si l'on part de la deuxième prémisse). Cette inférence correspond au "principe du syllogisme" sous la forme : $[(q \Rightarrow r) \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

5. *Pourquoi d'une proposition <u>élémentaire</u> ne peut-on inférer une <u>autre</u> proposition élémentaire ?*

   En vertu du principe d'indépendance des propositions élémentaires, la vérité ou la fausseté d'une proposition élémentaire n'exclut ni n'implique la vérité ou la fausseté d'une autre proposition élémentaire ; si p et q sont deux propositions élémentaires, il est parfaitement possible que p soit vraie et q fausse, l'inférence de p à q n'est donc pas valide. Cela se traduit par le fait qu'aucune formule de la forme "$p \Rightarrow q$" n'est une tautologie.

Corrigé des exercices du 26 sept. /3 octobre 2013

1. *Justifiez, sans faire de table de vérité, que les bi-implications suivantes sont des tautologies (rappel : $\top$ symbolise une tautologie, $\bot$, une contradiction) :*

   – $(\top \wedge \varphi) \Leftrightarrow \varphi$

     Puisqu'une conjonction n'est vraie que si ses deux membres sont vrais et que $\top$ est toujours vrai, $\top \wedge \varphi$ est vrai si φ est vrai, et faux si φ est faux ; $\top \wedge \varphi$ prend donc toujours la même valeur de vérité que φ.

   – $(\top \Rightarrow \varphi) \Leftrightarrow \varphi$

     Puisqu'une implication n'est fausse que si l'antécédent est vrai et le conséquent faux et que $\top$ est toujours vrai, $\top \Rightarrow \varphi$ est faux si φ est faux, et vrai si φ est vrai ; $\top \Rightarrow \varphi$ prend donc toujours la même valeur de vérité que φ.

   – $(\varphi \Rightarrow \top) \Leftrightarrow \top$

     Puisqu'une implication n'est fausse que si l'antécédent est vrai et le conséquent faux et que $\top$ est toujours vrai, $\varphi \Rightarrow \top$ ne peut être faux et est donc toujours vrai.

   – $(\varphi \Rightarrow \bot) \Leftrightarrow \sim\varphi$

     Puisqu'une implication n'est fausse que si l'antécédent est vrai et le conséquent faux et que $\bot$ est toujours faux, $\varphi \Rightarrow \bot$ est faux si φ est vrai, et vrai si φ est faux ; $\varphi \Rightarrow \bot$ prend donc toujours la même valeur de vérité que $\sim\varphi$.

2. *Les formules suivantes sont-elles des formes normales conjonctives :*

   – $(p \wedge \sim r \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$

     Non : dans le premier membre de la "formule" on trouve $\wedge$ et $\vee$ sans parenthésage ; cette suite de symboles est donc mal formée. Si l'on rétablit les parenthèses, on pourrait avoir soit : $((p \wedge \sim r) \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$, soit : $(p \wedge (\sim r \vee q)) \wedge (\sim q \vee \sim r)$. Dans le premier cas on n'a pas affaire à une FNC ; dans le second, il s'agit bien d'une FNC, ce qui apparaît clairement si

l'on supprime les parenthèses extérieures du premier membre, ce qui donne :
$p\ \wedge (\sim r \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$

– $(p \vee \sim q \vee r) \wedge \sim (p \vee \sim r) \wedge (\sim q \vee p \vee \sim p)$

Non : la négation ne doit porter que sur des formules élémentaires, ce qui n'est pas le cas dans le deuxième membre de la formule.

3. *Pourquoi peut-on dire, à la seule lecture de la formule :*

$$[(p \Rightarrow r) \vee t)] \Rightarrow (q \wedge s)$$

que ce n'est pas une tautologie ?

En vertu d'un petit théorème démontré en 1ère année (cf. p. 29-30 des *Rudiments*), on sait que si l'antécédent et le conséquent d'une implication sont neutres et n'ont en commun aucune lettre de proposition, alors cette implication n'est pas tautologique. Or c'est bien le cas ici et donc cette implication n'est pas tautologique.

4. *Soit la clause pour l'évaluation (booléenne) v d'une conjonction :*

$v(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{V}$ ssi $v(\varphi) = \mathrm{V}$ et $v(\psi) = \mathrm{V}$

Ecrire la clause correspondante pour :
$v(\varphi \wedge \psi) = F$ *ssi* $\underline{v(\varphi) = \mathrm{F} \text{ ou } v(\psi) = \mathrm{F}}$

On parvient à cette clause ainsi :
$[v(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{V}$ ssi $v(\varphi) = \mathrm{V}$ et $v(\psi) = \mathrm{V}]$ si et seulement si (par contraposition généralisée)
$[v(\varphi \wedge \psi) \neq \mathrm{V}$ ssi non $(v(\varphi) = \mathrm{V}$ et $v(\psi) = \mathrm{V})$] si et seulement si (par De Morgan)
$[v(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{F}$ ssi $v(\varphi) \neq \mathrm{V}$ ou $v(\psi) \neq \mathrm{V}]$ si et seulement si

$$v(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{F} \text{ ssi } v(\varphi) = \mathrm{F} \text{ ou } v(\psi) = \mathrm{F}$$

On remarquera que dans cette (micro) "démonstration", on a admis que les connecteurs utilisés dans le métalangage ("non", "et", "ou", "ssi") se comportent exactement comme les connecteurs correspondants de notre petit langage (" $\sim$ ", "$\wedge$", "$\vee$", "$\Leftrightarrow$"). Autrement dit, les "lois" qui valent pour ceux-ci (par ex. les lois de De Morgan), valent pour ceux-là.

5. *Ecrire la clause pour l'évaluation (booléenne) v d'une bi-implication :*
   $v(\varphi \Leftrightarrow \psi) = F$ *ssi* $\underline{v(\varphi) = \text{V ssi } v(\psi) = \text{F}}$ ce qui abrège la formulation :

   $v(\varphi \Leftrightarrow \psi) = F$ *ssi* $\underline{[v(\varphi) = \text{V et } v(\psi) = \text{F] ou } [v(\varphi) = \text{F et } v(\psi) = \text{V}]}$

   et celle qui lui correspond :
   $v(\varphi \Leftrightarrow \psi) = V$ *ssi* $\underline{v(\varphi) = \text{V ssi } v(\psi) = \text{V}}$ ce qui abrège la formulation :

   $v(\varphi \Leftrightarrow \psi) = V$ *ssi* $\underline{[v(\varphi) = \text{V et } v(\psi) = \text{V] ou } [v(\varphi) = \text{F et } v(\psi) = \text{F}]}$

Appendice

Soit deux interprétations i et j telles que pour toute formule élémentaire p, $i(p) =$ V <u>ssi</u> $j(p) =$ V. B.

On démontre, par récurrence sur le degré des formules, que, pour toute formule φ, $v_i(\varphi) =$ V ssi $v_j(\varphi) =$ V. Ce qui donne :

– Première étape.

  Soit φ une formule positive quelconque de degré 0, et de la forme p :

  – $v_i(\varphi) =$ V ssi $v_i(p) =$ V puisque φ est de la forme p ;
  – $v_i(p) =$ V ssi $i(p) =$ V par définition de l'évaluation d'une formule élémentaire ;
  – $i(p) =$ V, ssi $j(p) =$ V par la clause (B) ci-dessus ;
  – $j(p) =$ V ssi $v_j(p) =$ V par définition de l'évaluation d'une formule élémentaire ;
  – $v_j(p) =$ V ssi $v_j(\varphi) =$ V puisque φ est de la forme p.

  Donc, par transitivité : $v_i(\varphi) =$ V ssi $v_j(\varphi) =$ V.

– Deuxième étape : hypothèse de récurrence.

$\boxed{\text{Pour toute formule } \varphi \text{ de degré} < n,\ v_i(\varphi) = \text{V ssi } v_j(\varphi) = \text{V.}}$

– Troisième étape.

1. Soit φ une formule quelconque, de degré n et de la forme $\sim\psi$:
   - $v_i(\varphi) = \text{V}$ ssi $v_i(\sim\psi) = \text{V}$, puisque φ est de la forme $\sim\psi$;
   - $v_i(\sim\psi) = \text{V}$ ssi $v_i(\psi) = \text{F}$, par définition de l'évaluation d'une négation ;
   - $v_i(\psi) = \text{F}$ ssi $v_j(\psi) = \text{F}$, par l'hypothèse de récurrence (sous forme contraposée) ;
   - $v_j(\psi = \text{F}$ ssi $v_j(\sim\psi) = \text{V}$, par définition de l'évaluation d'une négation ;
   - $v_j(\sim\psi) = \text{V}$ ssi $v_j(\varphi) = \text{V}$, puisque φ est de la forme $\sim\psi$.

   Donc par transitivité, etc...
2. Soit φ une formule quelconque, de degré n et de la forme $\theta \wedge \lambda$:

   - $v_i(\varphi) = \text{V}$ ssi $v_i(\theta \wedge \lambda) = \text{V}$, puisque φ est de la forme $\theta \wedge \lambda$;
   - $v_i(\theta \wedge \lambda) = \text{V}$ ssi $v_i(\theta) = \text{V}$ et $v_i(\lambda) = \text{V}$, par définition de l'évaluation d'une conjonction ;
   - $v_i(\theta) = \text{V}$ et $v_i(\lambda) = \text{V}$ ssi $v_j(\theta) = \text{V}$ et $v_j(\lambda) = \text{V}$, par l'hypothèse de récurrence ;
   - $v_j(\theta) = \text{V}$ et $v_j(\lambda) = \text{V}$ ssi $v_j(\theta \wedge \lambda) = \text{V}$, par définition de l'évaluation d'une conjonction ;
   - $v_j(\theta \wedge \lambda) = \text{V}$ ssi $v_j(\varphi) = \text{V}$, puisque φ est de la forme $\theta \wedge \lambda$.

   Donc par transitivité etc.

3. Soit φ une formule positive quelconque, de degré n et de la forme $\theta \vee \lambda$: Il suffit de substituer '$\vee$' à '$\wedge$' et 'ou' à 'et' dans ce qui précède.

4. Soit φ une formule quelconque, de degré n et de la forme $\theta \Rightarrow \lambda$:

   - $v_i(\varphi) = \text{V}$ ssi $v_i(\theta \Rightarrow \lambda) = \text{V}$, puisque φ est de la forme $\theta \Rightarrow \lambda$;
   - $v_i(\theta \Rightarrow \lambda) = \text{V}$ ssi $v_i(\theta) = \text{F}$ ou $v_i(\lambda) = \text{V}$, par définition de l'évaluation d'une implication ;

- $v_i(\theta) = \text{F}$ ou $v_i(\lambda) = \text{V}$ ssi $v_j(\theta) = \text{F}$ ou $v_j(\lambda) = \text{V}$, par l'hypothèse de récurrence ;
- $v_j(\theta) = \text{F}$ ou $v_j(\lambda) = \text{V}$ ssi $v_j(\theta \Rightarrow \lambda) = \text{V}$, par définition de l'évaluation d'une implication ;
- $v_j(\theta \Rightarrow \lambda) = \text{V}$ ssi $v_j(\varphi) = \text{V}$, puisque φ est de la forme $\theta \Rightarrow \lambda$.

  Donc par transitivité etc.

- Conclusion :
$$v_i(\varphi) = \text{V} \text{ ssi } v_j(\varphi) = \text{V}, \text{ quelle que soit la formule } \varphi.$$

Remarque : on vient ainsi de démontrer quelque chose qui peut sembler "évident" mais qui ne l'est pas (il faut toujours se méfier des "évidences", quoiqu'en dise Descartes), à savoir qu'une évaluation v_i, correspondant à une interprétation i, est une "extension unique" de i à l'ensemble F des formules de notre petit langage ; ce qui revient à dire qu'une interprétation $i : P \to \{V, F\}$, détermine de manière unique la valeur de vérité de toutes les autres formules $\varphi \in F$, *via* l'évaluation v_i. C'est pourquoi, i et φ étant données, on peut parler, sans scrupule logique excessif, de "la valeur de vérité de φ pour i".

Corrigé des exercices du 10 oct. 2013

1. *Pourquoi un ensemble de vérité W, défini sémantiquement, est-il maximal au sens où, quelle que soit φ, si $\varphi \notin W$, alors $W \cup \{\varphi\}$ n'est pas satisfiable ?*

   Soit i l'interprétation correspondant à W (i.e. : pour toute formule ψ, $\psi \in W$ ssi $v_i(\psi)=$ V) et soit φ une formule quelconque telle que $\varphi \notin W$
   - Puisque $\varphi \notin W$, $v_i(\varphi) =$ F, d'où il résulte : $v_i(\sim\varphi)=$ V et donc $\sim\varphi \in W$; d'où : $\sim\varphi \in W \cup \{\varphi\}$.
   - Par définition : $\varphi \in W \cup \{\varphi\}$.
   Il s'ensuit que φ et $\sim\varphi$ appartiennent à $W \cup \{\varphi\}$; mais aucune interprétation ne pouvant satisfaire simultanément une formule et sa négation, aucune interprétation ne peut satisfaire toutes les formules appartenant à $W \cup \{\varphi\}$. $W \cup \{\varphi\}$ n'est donc pas satisfiable.

2. *Soit W un ensemble de vérité défini sémantiquement et i l'interprétation correspondante (i.e. pour tout φ, $\varphi \in W$ ssi $v_i(\varphi) = V$).*
   – *La formule $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ appartient-elle à W ?*
   Oui, puisque $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ est une brave tautologie et est donc vraie, en particulier, pour i. En général, quelle que soit φ, et quel que soit W, ensemble de vérité, si φ est une tautologie, $\varphi \in W$.

   – *Soit φ une formule appartenant à W et ψ une formule quelconque. Les formules $\varphi \vee \psi$ et $\varphi \Rightarrow \psi$ appartiennent-elles à W ?*
     – Puisque $\varphi \in W$, φ est vraie pour i et donc $\varphi \vee \psi$ est également vraie pour i. Il en résulte que $\varphi \vee \psi \in W$.
     – Puisque φ est vraie pour i, la valeur de vérité de $\varphi \Rightarrow \psi$ dépend de ψ. Si $\psi \in W$ alors ψ est vraie pour i et donc $\varphi \Rightarrow \psi$ est vraie pour i ; d'où $\varphi \Rightarrow \psi \in W$. Si $\psi \notin W$ alors ψ est fausse pour i et donc $\varphi \Rightarrow \psi$ est fausse pour i ; d'où $\varphi \Rightarrow \psi \notin W$.

   – *On admet que $\sim[(p \wedge q) \Rightarrow \sim r]$ appartient à W. Quelles sont les sous-formules de cette formule qui appartiennent à W ?*
   Les sous-formules de $\sim[(p \wedge q) \Rightarrow \sim r]$ sont celles qui figurent sur l'arbre de décomposition de cette formule, à savoir :

$$\sim[(p \wedge q) \Rightarrow \sim r] \quad (1)$$

$$[(p \wedge q) \Rightarrow \sim r] \quad (2)$$

$$p \wedge q \quad (3) \qquad\qquad \sim r \quad (4)$$

$$p \quad (5) \qquad q \quad (6) \qquad\qquad r \quad (7)$$

La question est donc de savoir lesquelles de ces formules sont vraies pour i, sachant que la formule (1) est vraie pour i. Puisque (2) est la négation de (1), (2) est fausse pour i et donc (2) $\notin W$. Puisque l'implication (2) est fausse pour i, (3) est vraie pour i et $\in W$, et (4) est fausse pour i et $\notin W$. Puisque la conjonction (3) est vraie pour i, (5) et (6) sont vraies pour i et $\in W$. Puisque la négation (4) est fausse pour i, (7) est vraie pour i et $\in W$. En résumé : les formules (3), (5), (6) et (7) sont vraies pour i et appartiennent donc à W, au contraire des formules (2) et (4).

Corrigé des exercices du 17-24 oct. 2013

1. *Soit W un ensemble de vérité et φ, ψ et θ trois formules quelconques ; montrez que :*

   A. En recourant à la définition sémantique d'un ensemble de vérité.

   Pour les trois questions, on admet que i est l'interprétation correspondant à W et donc telle que : pour toute formule φ, $\varphi \in W$ ssi $v_i(\varphi) = \mathrm{V}$.

   – *si ψ et $\psi \Rightarrow \varphi$ appartiennent à W, alors φ appartient à W.*

     Puisque $\psi \in W$ et $\psi \Rightarrow \varphi \in W$, on a : $v_i(\psi) = v_i(\psi \Rightarrow \varphi) =$V et en vertu de la table de $\Rightarrow$ cela n'est possible que si $v_i(\varphi) =$V. Donc $\varphi \in W$.

   – *si $\varphi \Rightarrow \theta$ et $\psi \Rightarrow \varphi$ appartiennent à W, alors $\psi \Rightarrow \theta$ appartient à W.*

     Puisque $\varphi \Rightarrow \theta \in W$ et $\psi \Rightarrow \varphi \in W$, on a : $v_i(\varphi \Rightarrow \theta) = v_i(\psi \Rightarrow \varphi) = \mathrm{V}$. Considérons, par ex., $v_i(\psi \Rightarrow \varphi) = \mathrm{V}$ (le raisonnement serait semblable en partant de $v_i(\varphi \Rightarrow \theta) = \mathrm{V}$). Cela signifie que l'on a : (1) $v_i(\psi) = \mathrm{F}$, ou (2) $v_i(\varphi) = \mathrm{V}$.

     – Dans le cas (1) : en vertu de la table de $\Rightarrow$, $v_i(\psi \Rightarrow \theta) = \mathrm{V}$ et donc $\psi \Rightarrow \theta \in W$.

     – Dans le cas (2) : puisque, par hyp., $v_i(\varphi \Rightarrow \theta) = \mathrm{V}$, on a, en vertu de la réponse à la question précédente : $v_i(\theta) = \mathrm{V}$; et donc, en vertu de la table de $\Rightarrow$, $v_i(\psi \Rightarrow \theta) = \mathrm{V}$, d'où : $\psi \Rightarrow \theta \in W$.

   – *si $\varphi \Rightarrow \sim\psi$ appartient à W, alors $\varphi \wedge \psi$ n'appartient pas à W.*

     Puisque $\varphi \Rightarrow \sim\psi \in W$, $v_i(\varphi \Rightarrow \sim\psi) = \mathrm{V}$; et en vertu des tables pour $\Rightarrow$, $\wedge$ et $\sim$, $v_i(\varphi \Rightarrow \sim\psi) = \mathrm{V}$ ssi $v_i(\sim(\varphi \wedge \psi)) = \mathrm{V}$ ssi $v_i(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{F}$, ssi $\varphi \wedge \psi \notin W$.

   B. En recourant à la définition syntaxique d'un ensemble de vérité.

- *si ψ et $\psi \Rightarrow \varphi$ appartiennent à W, alors φ appartient à W.*

  Puisque $\psi \Rightarrow \varphi \in W$ alors, en vertu de la clause d., $\psi \notin W$ ou $\varphi \in W$; or, par hyp., $\psi \in W$, d'où : $\varphi \in W$ [1].

- *si $\varphi \Rightarrow \theta$ et $\psi \Rightarrow \varphi$ appartiennent à W, alors $\psi \Rightarrow \theta$ appartient à W.*

  Considérons, par ex., $\psi \Rightarrow \varphi \in W$ (le raisonnement serait semblable en partant de $\varphi \Rightarrow \theta \in W$). Alors, en vertu de la clause d., on a : (1) $\psi \notin W$ ou (2) $\varphi \in W$.

  - Dans le cas (1) : en vertu de la clause d., puisque $\psi \notin W$, $\psi \Rightarrow \theta \in W$.

  - Dans le cas (2) : puisque $\varphi \in W$ et que, par hyp., $\varphi \Rightarrow \theta \in W$, en vertu de la réponse à la question précédente, $\theta \in W$ et donc, en vertu de la clause d., $\psi \Rightarrow \theta \in W$ [2].

- *si $\varphi \Rightarrow \sim\psi$ appartient à W, alors $\varphi \wedge \psi$ n'appartient pas à W.*

  Puisque $\varphi \Rightarrow \sim \psi \in W$, en vertu de la clause d., $\varphi \notin W$ ou $\sim \psi \in W$, c'est à dire, en vertu de la clause a. $\psi \notin W$. Donc, en vertu de la clause b., $\varphi \wedge \psi \notin W$ [3].

2. *Soit S un ensemble de formules et i une interprétation qui satisfait S. Montrez que S est un ensemble de vérité si et seulement si, quelle que soit la formule $\varphi \notin S$, i ne satisfait pas l'ensemble $S \cup \{\varphi\}$.*

   - Dans le sens $\rightarrow$: presque (voir exercice 1. du 10 oct. 2013) évident en vertu de la définition d'un ensemble de vérité.

   - Dans le sens $\leftarrow$: puisque i satisfait S, on a : pour toute formule φ, si $\varphi \in S$

1. Ce micro-raisonnement exploite le "principe du chien" (Chrysippe) : $\vDash [(\varphi \vee \psi) \wedge \sim\varphi] \Rightarrow \psi$.
2. La clause d. s'énonce : $\varphi \Rightarrow \psi \in W$ ssi $\varphi \notin W$ <u>ou</u> $\psi \in W$. Il suffit donc, pour que l'on ait $\varphi \Rightarrow \psi \in W$, ou bien que $\varphi \notin W$ (quelle que soit ψ), ou bien que $\psi \in W$ (quelle que soit φ).
3. La clause b. s'énonce : $\varphi \wedge \psi \in W$ ssi $\varphi \in W$ <u>et</u> $\psi \in W$. Il suffit donc, pour que l'on ait $\varphi \wedge \psi \notin W$, ou bien que $\varphi \notin W$ (quelle que soit ψ) ou bien que $\psi \notin W$ (quelle que soit φ).

alors $v_i(\varphi) = \text{V}$. Il s'agit donc de montrer la réciproque, - pour toute formule φ, si $v_i(\varphi) = \text{V}$ alors $\varphi \in S$ - pour montrer que S est un ensemble de vérité.

On admet : pour toute formule $\varphi \notin S$, i ne satisfait pas $S \cup \{\varphi\}$; comme i satisfait S, cela implique que, pour toute formule $\varphi \notin S$, $v_i(\varphi) = \text{F}$; et donc : pour toute formule φ, si $\varphi \notin S$ alors $v_i(\varphi) = \text{F}$, d'où pour contraposition : pour toute formule φ, si $v_i(\varphi) = \text{V}$ alors $\varphi \in S$.

On a donc : pour toute formule φ, si $\varphi \in S$ alors $v_i(\varphi) = \text{V}$; et : pour toute formule φ, si $v_i(\varphi) = \text{V}$ alors $\varphi \in S$, d'où : pour toute formule φ, $\varphi \in S$ ssi $v_i(\varphi) = \text{V}$.
S est donc un ensemble de vérité.

3. *Montrez que si W est un ensemble de vérité et i l'interprétation correspondante, alors aucune interprétation $j \neq i$ ne satisfait W.*

   Soit i l'interprétation telle que pour toute formule φ, $\varphi \in W$ ssi $v_i(\varphi) = \text{V}$ et soit j, une interprétation quelconque telle que $j \neq i$. Puisque $j \neq i$, il existe au moins une lettre de proposition p telle que $i(p) \neq j(p)$, par ex. $i(p) = \text{V}$ et $j(p) = \text{F}$ (même démonstration dans l'autre cas).
   Comme $i(p) = \text{V}$, $v_i(p) = \text{V}$ (par df. d'une évaluation) et donc, par hyp., $p \in W$.
   Or, par hyp., $j(p) = \text{F}$. Il existe donc au moins une formule appartenant à W, à savoir p, qui est fausse pour j ; j ne satisfait donc pas W. Comme j était quelconque, cela vaut de toute interprétation qui diffère de i.

Corrigé des exercices du 7 nov. 2013.

1. *Pour toute formule neutre φ, existe-t-il au moins un ensemble de vérité W tel que $\varphi \in W$?*

   Oui ! En effet, s'agissant d'une formule neutre, quelle qu'elle soit, on est assuré qu'il existe au moins une interprétation, disons i, qui la rend vraie et donc cette formule appartient à l'ensemble de vérité W défini par : $\varphi \in W$ ssi $v_i(\varphi) = \mathrm{V}$.

   Même question, mais sans la restriction aux formules neutres.

   Non ! Il suffit de se souvenir que les contradictions, n'étant vraies pour aucune interprétation, n'appartiennent à aucun ensemble de vérité. Il n'est donc pas vrai que pour *toute* formule φ il existe, etc...

2. *Soit S et S' deux ensembles de formules satisfiables tels que $S \cap S' = \emptyset$. (a) L'un de ces ensembles peut-il être un ensemble de vérité ? (b) Ces deux ensembles peuvent-ils être, tous les deux, des ensembles de vérité ?*

   (a) Oui ! Soit, par ex., un ensemble de vérité W, i l'interprétation correspondante et φ, une formule *neutre* appartenant à W. Alors $\sim\varphi \notin W$ et $\{\sim\varphi\}$ est un (petit !) ensemble satisfiable[4] ; et clairement $W \cap \{\sim\varphi\} = \emptyset$.

   (b) Non ! L'intersection de deux ensembles de vérité n'est certainement pas vide puisque les tautologies appartiennent à tous les ensembles de vérité.

3. *Faites l'arbre pour la formule suivante : $[\sim r \Rightarrow (p \wedge \sim q)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow q]$. Cette formule est-elle tautologique, neutre ou contradictoire ?*

   Arbre pour $[\sim r \Rightarrow (p \wedge \sim q)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow q]$:

4. Rappelons que la négation $\sim\varphi$ d'une formule neutre φ est elle-même une formule neutre puisque les interprétations qui rendent vraie φ rendent fausse $\sim\varphi$ et celles qui rendent fausse φ, rendent vraie $\sim\varphi$.

$$\sim\{[\sim r \Rightarrow (p \wedge \sim q)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow q]\} \quad (1)$$
$$\sim r \Rightarrow (p \wedge \sim q) \quad (2)$$
$$\sim[(p \wedge r) \Rightarrow q] \quad (3)$$
$$p \wedge r \quad (4)$$
$$\sim q \quad (5)$$
$$p \quad (6)$$
$$r \quad (7)$$
$$\begin{array}{cc} \sim\sim r \quad (8) & p \wedge \sim q \quad (9) \\ | & | \\ r \quad (10) & p \quad (11) \\ \uparrow & | \\ & \sim q \quad (12) \\ & \uparrow \end{array}$$

Règles utilisées :
(2), (3) sur (1) par la règle "$\sim\Rightarrow$" ;
(4), (5) sur (3) par la règle "$\sim\Rightarrow$" ;
(6), (7) sur (4) par la règle "$\wedge$" ;
(8), (9) sur (2) par la règle "$\Rightarrow$" ;
(10) sur (8) par la règle "$\sim\ \sim$" ;
(11), (12) sur (9) par la règle "$\wedge$" ;

Comme cet arbre est ouvert, la formule $[\sim r \Rightarrow (p \wedge \sim q)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow q]$ n'est pas une tautologie. C'est tout ce que l'on peut dire *en ne considérant que l'arbre*, même si le fait que toutes le branches soient ouvertes peut sembler remarquable et lourd (? ?) de conséquence.

Toutefois, si l'on se souvient, d'une part que l'arbre fournit *toutes* les interprétations qui rendent vraie la formule initiale et, d'autre part, qu'il y a huit (2^3) interprétations possibles pour une formule comportant trois lettres de proposition, on peut déterminer les interprétations qui rendent fausse la formule initiale. Ici les deux branches livrent une même interprétation i, à savoir : $i(p) = \mathrm{V}$, $i(q) = \mathrm{F}$ et $i(r) = \mathrm{V}$. C'est donc la seule interprétation qui rend vraie la formule initiale et fausse la formule pour laquelle on a fait l'arbre. Les sept autres interprétations rendent fausse la formule initiale et vraie la formule pour laquelle on a fait l'arbre. Cette dernière formule est donc neutre ; mais ce n'est pas l'arbre, par lui-même qui permet de tirer cette conclusion.

Il est important de bien comprendre que le fait que toutes les branches d'un arbre soient ouvertes, comme c'est le cas ici, n'implique nullement que la formule initiale soit tautologique et donc que la formule pour laquelle on a fait l'arbre soit contradictoire. Cela signifie seulement que toutes les interprétations qui satisfont l'antécédent de la formule pour laquelle on fait l'arbre (au cas où il s'agit d'une implication), sont compatibles avec toutes les interprétations qui rendent faux le conséquent ; mais cela n'est guère intéressant...

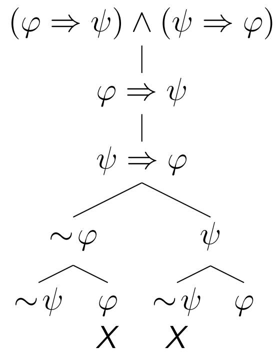
4. *Arbres : formulez les règles pour les formules de la forme $\varphi \Leftrightarrow \psi$ et $\sim(\varphi \Leftrightarrow \psi)$.*

   On peut raisonner de deux manières pour trouver ces règles.

   (a) Une bi-implication $\varphi \Leftrightarrow \psi$ est vraie dans deux cas : ou bien φ et ψ sont toutes les deux vraies, ou bien toutes les deux fausses, c'est à dire que $\sim\varphi$ et $\sim\psi$ sont toutes les deux vraies. Comme c'est une disjonction, la règle devra introduire une bifurcation, et, à la différence des règles jusqu'ici utilisées, il faudra écrire deux formules à l'extrémité de chaque branche. Même raisonnement pour les négations de bi-implication. On a donc les deux règles suivantes :

$$\Leftrightarrow : \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \Leftrightarrow \psi \\ \vdots \\ \diagup \quad \diagdown \\ \begin{array}{cc} \varphi & \sim\varphi \\ | & | \\ \psi & \sim\psi \end{array} \end{array} \qquad\qquad \sim\Leftrightarrow : \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ \sim(\varphi \Leftrightarrow \psi) \\ \vdots \\ \diagup \quad \diagdown \\ \begin{array}{cc} \varphi & \sim\varphi \\ | & | \\ \sim\psi & \psi \end{array} \end{array}$$

   (b) On peut partir de la réécriture d'une bi-implication sous forme d'une conjonction d'implications, $\varphi \Leftrightarrow \psi$ étant équivalente à $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$. Si l'on fait l'arbre pour une formule de cette forme cela donnera :



On constate que les deux branches du milieu sont "fermées" au sens où l'on ne trouvera jamais d'interprétation des lettres de proposition qui pourrait rendre vraies à la fois φ et $\sim\varphi$, ou ψ et $\sim\psi$. Les seules possibilités de rendre vraie $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$ ne pourront provenir que des deux autres branches ; et l'on retrouve, sans surprise, la règle ci-dessus pour la bi-implication. Même chose pour la négation de bi-implication.

Corrigé des exercices du 14 nov. 2013.

1. *Quel que soient S et S', ensembles satisfiables, l'union $S \cup S'$ est-elle satisfiable ?*

   Non ! Il suffit de considérer un ensemble S (nécessairement satisfiable) de formules élémentaires. On définit S' comme l'ensemble des négations des formules élémentaires appartenant à S. On est assuré que S' est satisfiable (si i satisfait S, on définit i' par : $i'(p) = V$ ssi $i(p) = F$), et on est assuré qu'il n'existe pas d'interprétation satisfaisant $S \cup S'$ puisque cela reviendrait à satisfaire des formules et leur négation, ce qui est impossible ! L'exemple le plus simple est le suivant : $S = \{p\}$ et $S' = \{\sim p\}$.

   Même question pour l'intersection, $S \cap S'$, en supposant $S \cap S' \neq \emptyset$.

   Oui ! Puisque $S \cap S' \subseteq S$ et que S est satisfiable : voir la deuxième question de l'exercice suivant.

2. *Soit S et S' deux ensembles quelconques tels que $S \subseteq S'$.*

   Peut-on conclure de ce que S est satisfiable, que S' l'est également ?

   Non ! S' étant quelconque, il se pourrait fort bien que l'on ait, pour une formule $\varphi \in S$, $\sim\varphi \in S'$. En ce cas, $\varphi \in S'$ et $\sim\varphi \in S'$ et donc S' n'est pas satisfiable.

   Peut-on conclure de ce que S' est satisfiable, que S l'est également ?

   Oui ! Par hyp. (S' satisfiable), il existe i telle que toutes les formules appartenant à S' sont vraies pour i ; or, par hyp. ($S \subseteq S'$), toutes les formules qui appartiennent à S appartiennent à S' ; donc toutes les formules qui appartiennent à S sont vraies pour i, d'où : S est satisfiable.

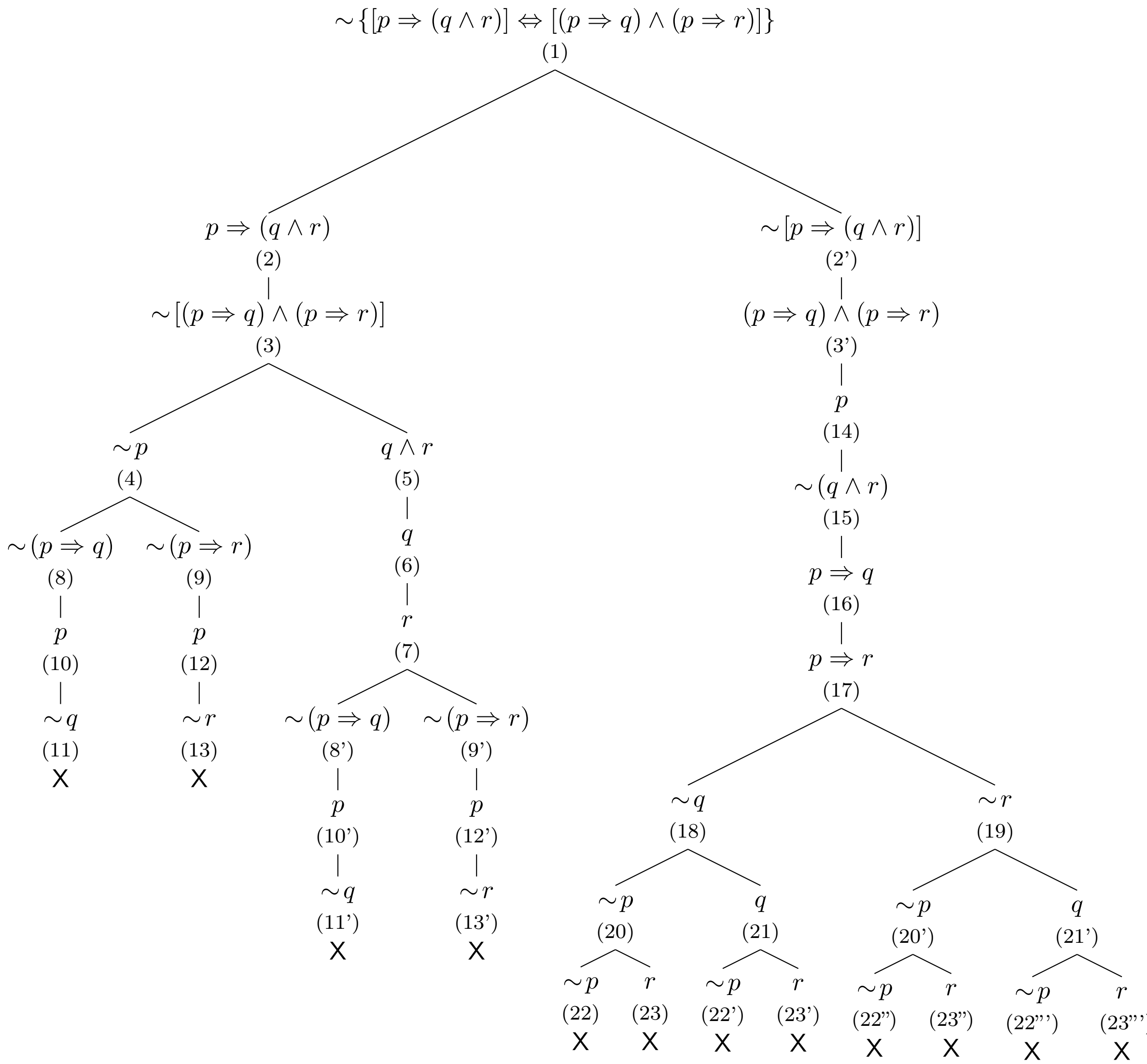
3. *Faites l'arbre pour la formule suivante, en vous servant éventuellement de la règle pour les formules de la forme $\sim(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ (à faire sur une feuille blanche !) :*

$$[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)]$$

Est-ce une tautologie ? Sinon pour quelle(s) interprétation(s) cette formule est-elle fausse

En vous guidant sur cet arbre, mettez cette formule en Forme Normale Conjonctive.

Arbre pour $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)]$:



Règles utilisées :

(2), (3), (2'), (3') sur (1) par la règle "$\sim\Leftrightarrow$" ;

(4), (5) sur (2) par la règle "$\Rightarrow$" ;
(6), (7) sur ((5) par la règle "$\wedge$" ;
(8), (9), (8'), (9') sur (3) par la règle "$\sim\wedge$" ;
(10), (11), (10'), (11') sur (8)/(8') par la règle "$\sim\Rightarrow$" ;
(12) (13), (12'), (13') sur (9)/(9') par la règle "$\sim\Rightarrow$".

(14), (15) sur (2') par la règle "$\sim\Rightarrow$" ;
(16), (17) sur (3') par la règle "$\wedge$" ;
(18), (19) sur (15) par la règle "$\sim\wedge$" ;
(20, (21), (20', (21') sur (16) par la règle "$\Rightarrow$" ;
(22)-(22"'), (23)-(23"') sur (17) par la règle "$\Rightarrow$".

Toutes les branches sont fermées ; il s'agit donc d'une tautologie.

FND de la formule initiale de l'arbre :

$$\begin{aligned}
&(\sim p \wedge p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge p \wedge \sim r) \vee \\
&(q \wedge r \wedge p \wedge \sim q) \vee (q \wedge r \wedge p \wedge \sim r) \vee \\
&(p \wedge \sim q \wedge \sim p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim p \wedge r) \vee \\
&(p \wedge \sim q \wedge q \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q \wedge q \wedge r) \vee \\
&(p \wedge \sim r \wedge \sim p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim r \wedge \sim p \wedge r) \vee \\
&(p \wedge \sim r \wedge q \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim r \wedge q \wedge r)
\end{aligned}$$

FNC de la formule pour laquelle on a fait l'arbre :

$$\begin{aligned}
&(p \vee \sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim p \vee r) \wedge \\
&(\sim q \vee \sim r \vee \sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r \vee \sim p \vee r) \wedge \\
&(\sim p \vee q \vee p \vee p) \wedge (\sim p \vee q \vee p \vee \sim r) \wedge \\
&(\sim p \vee q \vee \sim q \vee p) \wedge (\sim p \vee q \vee \sim q \vee \sim r) \wedge \\
&(\sim p \vee r \vee p \vee p) \wedge (\sim p \vee r \vee p \vee \sim r) \wedge \\
&(\sim p \vee r \vee \sim q \vee p) \wedge (\sim p \vee r \vee \sim q \vee \sim r)
\end{aligned}$$

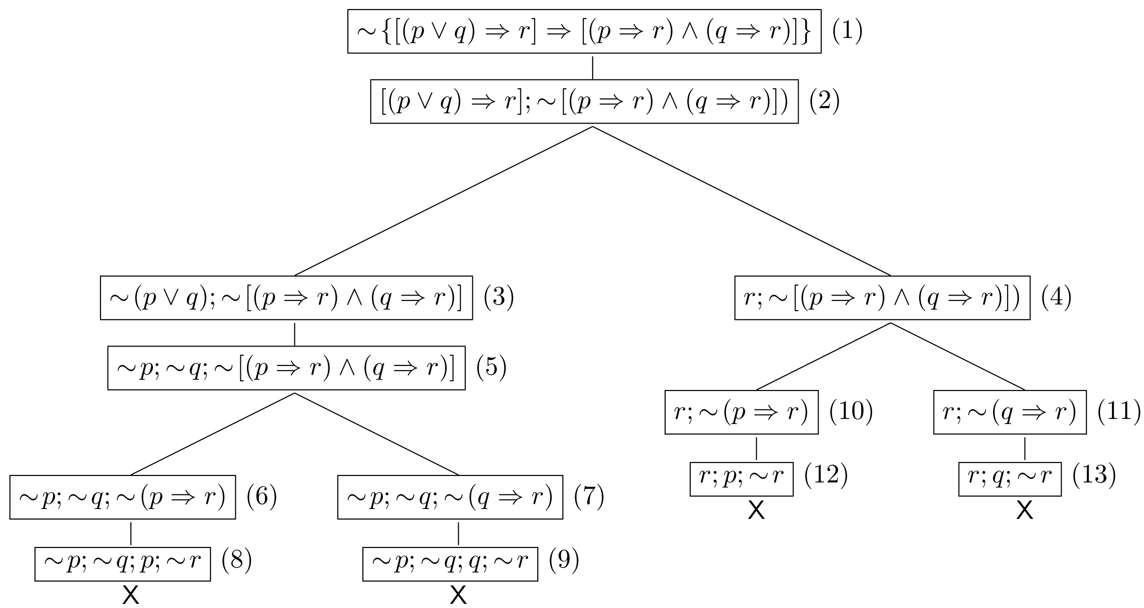
OUF !

Corrigé des exercices du 21 novembre 2013

1. *Faites l'arbre à vignettes pour la formule suivante et tirez-en les identités propositionnelle de la forme* $(p \wedge q_1 \wedge, \ldots, \wedge\, q_n) \Rightarrow (p \vee r_1 \vee, \ldots, \vee\, r_m)$.

$$[(p \vee q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$$

Arbre "à vignettes" pour cette formule :



Règles utilisées :
(2) sur (1) par la règle "$\sim\Rightarrow$" ; (3), (4) sur (2) par la règle "$\Rightarrow$" ; (5) sur (3) par la règle "$\sim\vee$" ; (6), (7) sur (5) par la règle "$\sim\wedge$" ; (8) sur (6) par la règle "$\sim\Rightarrow$" ; (9) sur (7) par la règle "$\sim\Rightarrow$" ; (10), (11) sur (4) par la règle $\sim\wedge$" ; (12) sur (10) par la règle " $\sim\Rightarrow$" ; (13) sur (11) par la règle " $\sim\Rightarrow$".

disjoints de la FND		conjoints de la FNC		réorganisation
$\sim p \wedge \sim q \wedge p \wedge \sim r$	$\dashrightarrow$	$p \vee q \vee \sim p \vee r$	$\dashrightarrow$	$\sim p \vee (q \vee p \vee r)$
$\sim p \wedge \sim q \wedge q \wedge \sim r$	$\dashrightarrow$	$p \vee q \vee \sim q \vee r$	$\dashrightarrow$	$\sim q \vee (p \vee q \vee r)$
$r \wedge p \wedge \sim r$	$\dashrightarrow$	$\sim r \vee \sim p \vee r$	$\dashrightarrow$	$(\sim r \vee \sim p) \vee r$
$r \wedge q \wedge \sim r$	$\dashrightarrow$	$\sim r \vee \sim q \vee r$	$\dashrightarrow$	$(\sim r \vee \sim q) \vee r$

On applique maintenant de Morgan aux disjonctions de négations et on utilise l'équivalence $\sim\varphi \vee \psi \ / \ \varphi \Rightarrow \psi$ ce qui donne :

formules reportées		par De Morgan		$\sim + \vee \ / \Rightarrow$ identités
$\sim p \vee (q \vee p \vee r)$	$\dashrightarrow$	$\dashrightarrow$	$\dashrightarrow$	$p \Rightarrow (q \vee p \vee r)$
$\sim q \vee (p \vee q \vee r)$	$\dashrightarrow$	$\dashrightarrow$	$\dashrightarrow$	$q \Rightarrow (p \vee q \vee r)$
$(\sim r \vee \sim p) \vee r$	$\dashrightarrow$	$\sim(r \wedge p) \vee r$	$\dashrightarrow$	$(r \wedge p) \Rightarrow r$
$(\sim r \vee \sim q) \vee r$	$\dashrightarrow$	$\sim(r \wedge q) \vee r$	$\dashrightarrow$	$(r \wedge q) \Rightarrow r$

2. *Montrez que, quels que soient φ, ψ, $\varphi \vDash \psi$ ssi $\varphi \wedge \sim\psi$ est une contradiction.*

$\varphi \vDash \psi$ ssi pour aucune interprétation i, $v_i(\varphi) = V$ et $v_i(\psi) = F$ (par df. de "conséquence sémantique") ssi $\varphi \Rightarrow \psi$ est une tautologie (en vertu de la table pour "$\Rightarrow$") ssi $\sim (\varphi \wedge \sim \psi)$ est une tautologie (en vertu de l'équivalence : $(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow \sim (\varphi \wedge \sim \psi))$ ssi $\varphi \wedge \sim\psi$ est une contradiction (en vertu de la loi de double négation !!).

Autre démonstration (encore plus court !!) : $\varphi \vDash \psi$ ssi pour aucune interprétation i, $v_i(\varphi) = V$ et $v_i(\psi) = F$ ssi pour aucune interprétation i, $v_i(\varphi) = V$ et $v_i(\sim\psi) = V$ ssi pour aucune interprétation i, $v_i(\varphi \wedge \sim\psi) = V$ ssi $\varphi \wedge \sim\psi$ est une contradiction.

Autre démonstration (par contraposition) : $\varphi \nvDash \psi$ ssi il existe une interprétation i telle que $v_i(\varphi) = V$ et $v_i(\psi) = F$ ssi il existe une interprétation i telle que $v_i(\varphi) = V$ et $v_i(\sim \psi) = V$ ssi il existe une interprétation i telle que $v_i(\varphi \wedge \sim\psi) = V$ ssi $\varphi \wedge \sim\psi$ n'est pas contradictoire.

Corrigé des exercices du 28 novembre 2013.

1. *Soit φ et ψ deux formules quelconques telles que $\varphi \nvDash \psi$ (i.e. ψ n'est pas conséquence sémantique de φ). L'arbre pour la formule $\varphi \Rightarrow \psi$ ferme-t-il ?*

   Non ! Si $\varphi \nvDash \psi$, alors, par df., il existe au moins une interprétation qui rend vraie φ et fausse ψ et donc qui rend fausse l'implication $\varphi \Rightarrow \psi$, implication qui n'est donc pas tautologique. Donc l'arbre pour $\varphi \Rightarrow \psi$ comporte au moins une branche ouverte.

2. *Soit W un ensemble de vérité et φ une formule quelconque. Montrez que si $W \vDash \varphi$ alors $\varphi \in W$.*

   Soit i l'interprétation (unique) correspondant à W, i.e. telle que : pour toute formule ψ, $\psi \in W$ ssi $v_i(\psi) = \text{V}$. Puisque $W \vDash \varphi$, toute interprétation qui satisfait W satisfait φ et donc $v_i(\varphi) = \text{V}$. Donc $\varphi \in W$.

3. *Soit S un ensemble satisfiable de formules et φ une formule quelconque. Montrez que $S \cup \{\varphi\}$ est satisfiable ssi $S \nvDash \sim\varphi$.*

   Dans le sens $\rightarrow$: si $S \cup \{\varphi\}$ est satisfiable, alors il existe une interprétation i qui satisfait S et telle que $v_i(\varphi) = \text{V}$; d'où : $v_i(\sim\varphi) = \text{F}$. Il existe donc une une interprétation qui satisfait S mais pas $\sim\varphi$ d'où il suit $S \nvDash \sim\varphi$.

   Dans le sens $\leftarrow$: si $S \nvDash \sim\varphi$ alors il existe une interprétation i qui satisfait S et telle que $v_i(\sim\varphi) = \text{F}$; d'où $v_i(\varphi) = \text{V}$. Il existe donc une interprétation qui satisfait $S \cup \{\varphi\}$.

   Remarque : on aurait pu se contenter d'une suite de "ssi" mais cela aurait été moins facile à lire :

   $S \cup \{\varphi\}$ est satisfiable ssi
   il existe une interprétation i qui satisfait S et telle que $v_i(\varphi) = \text{V}$ ssi
   il existe une interprétation i qui satisfait S et telle que $v_i(\sim\varphi) = \text{F}$ ssi
   il existe une une interprétation qui satisfait S mais pas $\sim\varphi$ ssi
   $S \nvDash \sim\varphi$.

Corrigé des exercices du 5 déc. 2013.

1. *Montrez que* $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$ *ssi pour tout ensemble de vérité* W*,* $\varphi \in W$ *ssi* $\psi \in W$*.*

   Soit W un ensemble de vérité quelconque et i l'interprétation correspondante. Alors : $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$ ssi $[v_i(\varphi) = \mathrm{V}$ ssi $v_i(\psi) = \mathrm{V}]$ ssi $[\varphi \in W$ ssi $\psi \in W]$. Comme W est quelconque cela vaut pour tout ensemble de vérité.

2. *Justifiez, en procédant comme pour les règles examinées en cours, la règle suivante du calcul des séquents (introduction à gauche de la disjonction) :*

$$\frac{\Phi, \theta \to \Psi \qquad\qquad\qquad \Phi, \lambda \to \Psi}{\Phi, \theta \vee \lambda \to \Psi}$$

   Supposons que $\Phi, \theta \vee \lambda \to \Psi$ ne soit pas tautologique. Il existe alors une interprétation i telle que toutes les formules appartenant à $\Phi \cup \{\theta \vee \lambda\}$ sont vraies pour i (et en particulier toutes les formules appartenant à Φ sont vraies pour i) et toutes les formules appartenant à Ψ sont fausses pour i. D'où il suit, en particulier que $v_i(\theta \vee \lambda) = \mathrm{V}$, c'est à dire que $v_i(\theta) = \mathrm{V}$ **ou** que $v_i(\lambda) = \mathrm{V}$; et donc toutes les formules appartenant à $\Phi \cup \{\theta\}$ sont vraies pour i **ou** toutes les formules appartenant $\Phi \cup \{\lambda\}$ sont vraies pour i.

   Il en résulte que pour cette interprétation i,
   - toutes les formules appartenant à $\Phi \cup \{\theta\}$ sont vraies et toutes celles appartenant à Ψ sont fausses
     ou
   - toutes les formules appartenant à $\Phi \cup \{\lambda\}$ sont vraies et toutes celles appartenant à Ψ sont fausses.

   L'un ou l'autre (au moins !) des deux séquents $\Phi, \theta \to \Psi$, $\Phi, \lambda \to \Psi$ n'est donc pas tautologique.

   Par contraposition, on en tire que si les deux séquents $\Phi, \theta \to \Psi$ et $\Phi, \lambda \to \Psi$ sont tautologiques, le séquent $\Phi, \theta \vee \lambda \to \Psi$ est lui même tautologique.

3. *Faites l'arbre "à vignettes" pour la formule suivante et tirez-en les identités propostionnelles sur le modèle de ce qui a été fait au cours des séances précédentes (mais en vous autorisant des raccourcis, si vous en voyez...) :*

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$$

Arbre pour la formule ci-dessus :

$$\boxed{\sim\{[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q\}}$$

$$\boxed{[(p \vee q) \wedge \sim p]; \sim q}$$

$$\boxed{p \vee q; \sim p; \sim q}$$

$$\boxed{p; \sim p; \sim q} \qquad \boxed{q; \sim p; \sim q}$$

X X

Si l'on observe ce qui résulte de toutes le transformations qui, à partir des vignettes terminales, aboutissent aux identités propositionnelles, on remarque que l'antécédent de ces identités est constitué de la conjonction des formules élémentaires affirmées dans la vignette d'origine, et le conséquent, de la disjonction des formules qui sont niées dans la vignette d'origine ; ce qui donne ici :

$$\boxed{p; \sim p; \sim q} \dashrightarrow p \Rightarrow (p \vee q)$$
$$\boxed{q; \sim p; \sim q} \dashrightarrow q \Rightarrow (p \vee q)$$

Honnêtes tautologies, s'il en fut...

Démonstration dans le calcul des séquents :

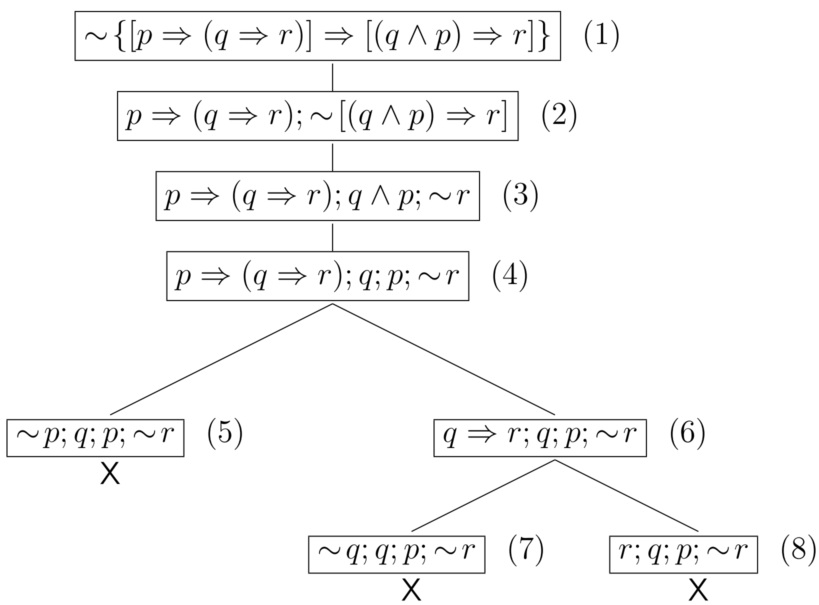
$$p \rightarrow p, q \qquad\qquad q \rightarrow p, q$$

$$p \vee q \rightarrow p, q$$
$$p \vee q \sim p \rightarrow q$$
$$(p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow q$$
$$\rightarrow [(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$$

Corrigé des exercices du 12 déc. 2013

1. *Faire la démonstration dans le calcul des séquents de la formule :*
   $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(q \wedge p) \Rightarrow r]$

   Bien que ce ne soit pas absolument nécessaire, on fait d'abord l'arbre à vignettes pour cette formule :



   (2) sur (1) par la règle "$\sim\Rightarrow$" ; (3) sur (2) par la règle "$\sim\Rightarrow$" ; (4) sur (3) par la règle "$\wedge$" ; (5), (6) sur (4) par la règle "$\Rightarrow$" ; (7), (8) sur (6) par la règle "$\Rightarrow$".

   On tire des trois vignettes terminales trois séquents élémentaires tautologiques (qui vont servir d'axiomes dans la démonstration dans le calcul des séquents) en mettant à gauche de la flèche des séquents les formules élémentaires affirmées et à droite, celles qui sont niées (en supprimant la négation, évidemment), ce qui donne : (5) $\dashrightarrow$ $q, p \rightarrow p, r$; (7)$\dashrightarrow$ $q, p \rightarrow q, r$, (8)$\dashrightarrow$ $r, q, p \rightarrow r$.

   Démonstration dans le calcul des séquents :

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
 & q, p \to \boxed{q}, r \quad (7) \qquad \boxed{r}, q, p \to r \quad (8) \\
 & \text{intro. à gauche de "}\Rightarrow\text{"} \\
q, p \to \boxed{p}, r \quad (5) & \boxed{q \Rightarrow r}, q, p \to r \quad (6)
\end{array} \\
\text{intro. à gauche de "}\Rightarrow\text{"} \\
p \Rightarrow (q \Rightarrow r), q, p \to r \quad (4) \\
\text{intro. à gauche de "}\wedge\text{"} \\
p \Rightarrow (q \Rightarrow r), q \wedge p \to r \quad (3) \\
\text{intro. à droite de "}\Rightarrow\text{"} \\
p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \to (q \wedge p) \Rightarrow r \quad (2) \\
\text{intro. à droite de "}\Rightarrow\text{"} \\
\to [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(q \wedge p) \Rightarrow r] \quad (1)
\end{array}
$$

On aurait pu procéder directement : supposons que le séquent (1) ne soit pas tautologique. Il existe donc une interprétation i qui le rend faux, i.e. qui rend vrai tout ce qui est à gauche de la flèche et faux tout ce qui est droite de la flèche. Ici, il n'y a rien à gauche et une seule formule à droite, ce qui signifie tout simplement que $v_i([p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(q \wedge p) \Rightarrow r]) = F$ et donc $v_i(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) = V$ et $v_i((q \wedge p) \Rightarrow r) = F$.

En ce cas, le séquent (2) est lui-même faux pour i puisque tout ce qui est à gauche de la flèche est vrai pour i et tout ce qui est à droite de la flèche est faux pour i.

De la même manière, puisque $v_i((q \wedge p) \Rightarrow r) = F$, on a : $v_i(q \wedge p) = V$ et $v_i(r) = F$; et donc le séquent (3) est lui-même faux pour i puisque, etc.

Maintenant, comme $v_i(q \wedge p) = V$, $v_i(q) = V$ et $v_i(p) = V$, et donc le séquent (4) est lui même faux pour i puisque, etc.

Un peu plus compliqué ! : puisque $v_i(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) = V$, $v_i(p) = F$ **ou** $v_i(q \Rightarrow r) = V$ et donc le séquent (5) est faux pour i **ou** le séquent (6) est faux pour i, puisque, etc. Or il est impossible que le séquent (5) soit faux pour i puisqu'il faudrait alors que $i(p) = V$ et $i(p) = F$ ce qui est absurde. Il reste donc que le séquent (6) soit faux pour i.

Mais alors, puisque $v_i(q \Rightarrow r) = V$, $i(q) = F$ **ou** $i(r) = V$ et donc le séquent (7) est faux pour i **ou** le séquent (8) est faux pour i, mais cela est impossible puisque, etc.

Il en résulte qu'il n'existe pas d'interprétation i rendant faux le séquent (1), ce dernier est donc tautologique.

Remarque : on voit que l'on peut "mécaniser" ce raisonnement un peu "longuet". Il suffit de noter que l'on met à gauche toutes les formules qui doivent être vraies pour la supposée interprétation qui rend faux un séquent, et à droite toutes les formules qui doivent être fausses pour cette même supposée interprétation.

Ainsi on passe de (3) à (4), par ex., en notant que la supposée interprétation i qui rend faux le séquent (3), rend vrais aussi bien p que q ; on met donc p et q à gauche de la flèche dans le séquent (4), et on laisse le reste sans changement.

Le cas du passage de (4) à (5), (6) peut sembler un peu plus compliqué : dans (4), supposé faux pour l'interprétation supposée i, $v_i(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) = V$ et donc soit $i(p) = F$ soit $v_i(q \Rightarrow r) = V$. Il faut donc "bifurquer" et cela donne les deux séquents (5) et (6) : dans (5) on met p à droite, puisque $i(p) = F$, le reste étant inchangé, et dans (6) on met $q \Rightarrow r$ à gauche, puisque $v_i(q \Rightarrow r) = V$, le reste étant inchangé.

2. *A quelle règle pour le calcul des séquents, correspond la règle pour les arbres : "$\sim \wedge$" ?*

   La règle pour les arbres "$\sim \wedge$" est une règle d'élimination de la négation de conjonction, à laquelle correspond donc, en calcul des séquents, une règle d'introduction de la conjonction à droite de la flèche.

3. *Soit la règle suivante du calcul des séquents :*

$$\frac{\Phi, \theta \to \Psi \qquad\qquad \Phi, \lambda \to \Psi}{\Phi, \theta \vee \lambda \to \Psi}$$

   Supposons que les deux ensembles de formules Φ et Ψ soient vides. Que signifie alors cette règle ?

   Réécrivons la règle en tenant compte de la supposition ; cela donne :

$$\frac{\theta \to \qquad\qquad \lambda \to}{\theta \vee \lambda \to}$$

   Cette règle se lit donc : si les deux *séquents* $\theta \to$ et $\lambda \to$ sont tautologiques, alors le *séquent* $\theta \vee \lambda \to$ est tautologique.

Or on a vu en général que si $\Phi \rightarrow$ est un séquent tautologique, alors la conjonction des formules appartenant à Φ est contradictoire (au sens habituel de la logique des prop.). Ici les trois séquents ne comptent qu'une seule formule à gauche de la flèche, ce qui conduit à reformuler ce que l'on vient de dire de la manière suivante :

si les deux *formules* θ et λ sont contradictoires, alors la *formule* $\theta \vee \lambda$ est contradictoire, ce qui est une évidence logique...