Contrôle continu de logique L1 n°1 – Semestre 2
Correction

Mercredi 4 Mars 2015

Tous les documents sont autorisés.
Feuille imprimée *recto&verso*.
Toutes les réponses doivent être rédigées, détaillées, et justifiées.

1 Justifications de règles dérivées (5 pts)

Vous montrerez que ces règles sont des règles *dérivées* (i.e. qu'elles jouent le rôle d'un simple raccourci, qu'elles nous épargnent seulement des lignes de calcul). Vous donnerez en guise de justification le détail, en toute généralité, du calcul qu'elles nous épargnent.

1. Règle (W) :

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & \phi & \\
\cline{2-2}
2 & \psi \to \phi & \text{W, 1}
\end{array}
$$

   Pour justifier cette règle, il fallait présenter la dérivation suivante :

$$
\begin{array}{r|l|ll}
1 & \phi & & \\
\cline{2-2}
2 & & \psi & \text{A} \\
\cline{3-3}
3 & & \phi & \text{R1} \\
4 & \psi \to \phi & & \to \text{I, 2-3}
\end{array}
$$

2. Règle (V) :

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & \neg\phi & \\
\cline{2-2}
2 & \phi \to \psi & \text{V, 1}
\end{array}
$$

Pour justifier cette règle, il fallait présenter la dérivation suivante :

1	$\neg\phi$	
2	ϕ	A
3	$\neg\psi$	A
4	ϕ	R2
5	$\neg\phi$	R1
6	$\neg\neg\psi$	$\neg$ I, 3-5
7	ψ	$\neg$ E, 6
8	$\phi \rightarrow \psi$	$\rightarrow I$, 2-7

Autre possibilité :

1	$\neg\phi$	
2	$\neg\phi \vee \psi$	$\vee$ I, 1
3	ϕ	A
4	$\neg\phi \vee \psi$	R2
5	ψ	$\vee$ E, 3, 4
6	$\phi \rightarrow \psi$	$\rightarrow$, 3-5

3. Règle (CP) :

1	$\phi \rightarrow \psi$	
2	$\neg\psi \rightarrow \neg\phi$	CP, 1

Pour justifier cette règle, il fallait présenter la dérivation suivante :

1	$\phi \to \psi$	
2	$\quad \neg\psi$	A
3	$\quad\quad \phi$	A
4	$\quad\quad \phi \to \psi$	R1
5	$\quad\quad \psi$	$\to$ E, 3, 4
6	$\quad\quad \neg\psi$	R2
7	$\quad \neg\phi$	$\neg$ I, 3-6
8	$\neg\psi \to \neg\phi$	$\to$ I, 2-7

2 Équivalence logique (5 pts)

Vous démontrerez, en utilisant la méthode de déduction naturelle que les formules $\forall x(Fx \wedge Gx)$ et $(\forall xFx \wedge \forall xGx)$ sont logiquement équivalentes.

On démontrera que les deux formules sont logiquement équivalentes en construisant deux dérivations, la première ayant pour prémisse $\forall x(Fx \wedge Gx)$ et pour conclusion $(\forall xFx \wedge \forall xGx)$ et la seconde ayant pour prémisse $(\forall xFx \wedge \forall xGx)$ et pour conclusion $\forall x(Fx \wedge Gx)$.

1. Première dérivation :

1	$\forall x(Fx \wedge Gx)$	P
2	$F\hat{a} \wedge G\hat{a}$	$\forall$ E, 1
3	$F\hat{a}$	$\wedge$ E, 2
4	$\forall xFx$	$\forall$ I, 3
5	$G\hat{a}$	$\wedge$ E, 2
6	$\forall xGx$	$\forall$ I, 5
7	$\forall xFx \wedge \forall xGx$	$\wedge$ I, 4, 6

2. Deuxième dérivation :

1	$\forall xFx \wedge \forall xGx$	P
2	$\forall xFx$	$\wedge$ E, 1
3	$\forall xGx$	$\wedge$ E, 1
4	$F\hat{a}$	$\forall$ E, 2
5	$G\hat{a}$	$\forall$ E, 3
6	$F\hat{a} \wedge G\hat{a}$	$\wedge$ I, 4, 5
7	$\forall x(Fx \wedge Gx)$	$\forall$ I, 6

Les formules sont bien logiquement équivalentes.

3 Dérivations (6 pts)

1. Vous démontrerez que l'on peut dériver $\forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$ à partir des prémisses $\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx)$ et $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$. Autrement dit, vous construirez une dérivation qui suivra ce patron :

1	$\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx)$	P
2	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	P
$\vdots$	$\vdots$	
?	$\forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$	?

Solution :

1	$\forall x(Gx \to \neg Hx)$	P
2	$\forall x(Fx \to Gx)$	P
3	$F\hat{a} \to G\hat{a}$	$\forall$ E, 2
4	Fa	A
5	$Fa \to Ga$	R3
6	Ga	$\to$ E, 4, 6
7	$\forall x(Gx \to \neg Hx)$	R1
8	$Ga \to \neg Ha$	$\forall$ E, 8
9	$\neg Ha$	$\to$ E, 7, 9
10	$F\hat{a} \to \neg H\hat{a}$	$\to$ I, 4-10
11	$\forall x(Fx \to \neg Hx)$	$\forall$ I, 11

2. Vous démontrerez que l'on peut dériver $\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$ à partir des prémisses $\forall x(Mx \to \neg Bx)$ et $\exists x(Ax \wedge Mx)$. Autrement dit, vous construirez une dérivation qui suivra ce patron :

1	$\forall x(Mx \to \neg Bx)$	P
2	$\exists x(Ax \wedge Mx)$	P
$\vdots$	$\vdots$	
?	$\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$	?

Solution :

1	$\forall x(Mx \rightarrow \neg Bx)$	P
2	$\exists x(Ax \wedge Mx)$	P
3	$\boxed{a}\ Aa \wedge Ma$	A
4	$\forall x(Mx \rightarrow \neg Bx)$	R1
5	$Ma \rightarrow \neg Ba$	$\forall$ E, 4
6	Ma	$\wedge$ E, 3
7	$\neg Ba$	$\rightarrow$ E, 6, 5
8	Aa	$\wedge$ E, 3
9	$Aa \wedge \neg Ba$	$\wedge$ I, 7, 8
10	$\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$	$\exists$ I, 9
11	$\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$	$\exists$ E, 2, 3-10

4 Question (4 pts)

Peut-on conclure $\exists x(Fx \wedge Gx)$ de la prémisse $(\exists xFx \wedge \exists xGx)$? Autrement dit, l'implication $(\exists xFx \wedge \exists xGx) \rightarrow \exists x(Fx \wedge Gx)$ est-elle une instance de loi logique ? Si oui, essayez d'en donner la dérivation. Si non, expliquez pourquoi (i.e. donnez un domaine et une interprétation des lettres de prédicat qui rendraient l'antécédent vrai et le conséquent faux).

Si cette formule est une instance de loi logique, alors elle est vraie pour toutes les interprétations. Est-elle une instance de loi logique ? Non, cette implication n'est pas une instance de loi logique. On le démontrera en prenant le contre-exemple suivant :

Soit :

- D : {a, b}
- F : {a}
- G : {b}

Selon ce domaine et cette interprétation, la formule est telle que l'antécédent est vrai et le conséquent faux. On le montrera en considérant la formule suivante, qui lui est équivalente.

$$[(Fa \vee Fb) \wedge (Ga \vee Gb)] \rightarrow [(Fa \wedge Ga) \vee (Fb \wedge Gb)]$$

$$[V \wedge V] \rightarrow [F \vee F]$$

L'antécédent est vrai (chacun des conjoints est vrai) et le conséquent faux (chacun des disjoints est faux). Il est donc faux que la formule est vraie pour toutes les interprétations (nous venons d'en trouver une qui la rend fausse).