

Contrôle continu de logique L1 n°1 – Semestre 2

Mercredi 4 Mars 2015

Tous les documents sont autorisés.

Feuille imprimée *recto* et *verso*.

Toutes les réponses doivent être rédigées, détaillées, et justifiées.

1 Justifications de règles dérivées (5 pts)

Vous montrerez que ces règles sont des règles *dérivées* (i.e. qu'elles jouent le rôle d'un simple raccourci, qu'elles nous épargnent seulement des lignes de calcul). Vous donnerez en guise de justification le détail, en toute généralité, du calcul qu'elles nous épargnent.

1. Règle (W) :

$$\begin{array}{l|l} 1 & \phi \\ \hline 2 & \psi \rightarrow \phi \end{array} \quad \text{W, 1}$$

2. Règle (V) :

$$\begin{array}{l|l} 1 & \neg\phi \\ \hline 2 & \phi \rightarrow \psi \end{array} \quad \text{V, 1}$$

3. Règle (CP) :

$$\begin{array}{l|l} 1 & \phi \rightarrow \psi \\ \hline 2 & \neg\psi \rightarrow \neg\phi \end{array} \quad \text{CP, 1}$$

2 Équivalence logique (5 pts)

Vous démontrerez, en utilisant la méthode de déduction naturelle que les formules $\forall x(Fx \wedge Gx)$ et $(\forall xFx \wedge \forall xGx)$ sont logiquement équivalentes.

3 Dérivations (6 pts)

1. Vous démontrerez que l'on peut dériver $\forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$ à partir des prémisses $\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx)$ et $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$. Autrement dit, vous construirez une dérivation qui suivra ce patron :

1		$\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx)$	P
2		$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	P
⋮		⋮	
?		$\forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$?

2. Vous démontrerez que l'on peut dériver $\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$ à partir des prémisses $\forall x(Mx \rightarrow \neg Bx)$ et $\exists x(Ax \wedge Mx)$. Autrement dit, vous construirez une dérivation qui suivra ce patron :

1		$\forall x(Mx \rightarrow \neg Bx)$	P
2		$\exists x(Ax \wedge Mx)$	P
⋮		⋮	
?		$\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$?

4 Question (4 pts)

Peut-on conclure $\exists x(Fx \wedge Gx)$ de la prémisse $(\exists xFx \wedge \exists xGx)$? Autrement dit, l'implication $(\exists xFx \wedge \exists xGx) \rightarrow \exists x(Fx \wedge Gx)$ est-elle une instance de loi logique? Si oui, essayez d'en donner la dérivation. Si non, expliquez pourquoi (i.e. donnez un domaine et une interprétation des lettres de prédicat qui rendraient l'antécédent vrai et le conséquent faux).