

## Géodésiques

Une ligne **géodésique** est, dans le langage courant, le plus court chemin pour relier deux points en fonction des contraintes du milieu. Le terme 'géodésique' vient de [géodésie](#) (du grec *gê* "terre" et *daiein* "partager, diviser"), la science de la mesure de la taille et de la forme de la [Terre](#).

Néanmoins, les [mathématiques](#) fournissent une définition plus précise. Une **géodésique** est la généralisation de la notion de "ligne droite" aux "espaces courbes". La définition de la géodésique dépend du type d'"espace courbe". Dans le cas où cet espace dispose d'une [métrique](#), alors la géodésique se définit effectivement comme, localement, le chemin le plus court entre deux points de l'espace.

Les ([lignes](#)) *géodésiques* d'une surface, qui sont en quelque sorte les "droites" de cette surface, possèdent plusieurs définitions équivalentes :

DEF 1 (mécanique) : ce sont les trajectoires d'un point matériel se déplaçant sur la surface et soumis à la seule réaction normale ; on peut donc les réaliser physiquement en faisant rouler (côté concave) des petites billes sur la surface, en état d'apesanteur (avec pesanteur, ces lignes deviennent les [lignes d'écoulement](#))

DEF 2 (mécanique) : ce sont les figure d'équilibre d'un fil pesant homogène inextensible placé sur la surface, en état d'apesanteur (avec pesanteur, ces figures deviennent les [chaînettes](#)).

En général, par tout point de la surface passe, dans une direction donnée, une géodésique et une seule, et par deux points au moins une géodésique (cette propriété est une généralisation des axiomes d'Euclide, mais pour une surface qui n'est pas isométrique au plan, tout est dans le "en général" !)

On démontre que tout arc joignant deux points de la surface, de longueur minimum, est une géodésique, mais il peut y avoir des géodésiques joignant deux points, de longueur non minimale (par exemple deux points d'une génératrice d'un cylindre de révolution sont aussi joints par une hélice circulaire, plus longue, qui est pourtant aussi une géodésique).

Par contre, pour tout point  $B$  assez voisin d'un point  $A$  de la surface, il existe une unique géodésique joignant  $A$  à  $B$ , réalisant forcément le minimum de la distance géodésique de  $A$  à  $B$ .

Exemples : - les géodésiques du plan sont les droites

- les géodésiques de la sphère sont les grands cercles et sont aussi appelées des [orthodromies](#).
- les géodésiques d'un cylindre sont les [hélices](#) tracées sur ce cylindre.
- les [géodésiques du tore](#) donnent des calculs conduisant à des intégrales elliptiques
- les géodésiques d'une surface [développable](#) (y compris donc les [cônes](#)) sont les courbes

## Espace-temps et gravitation

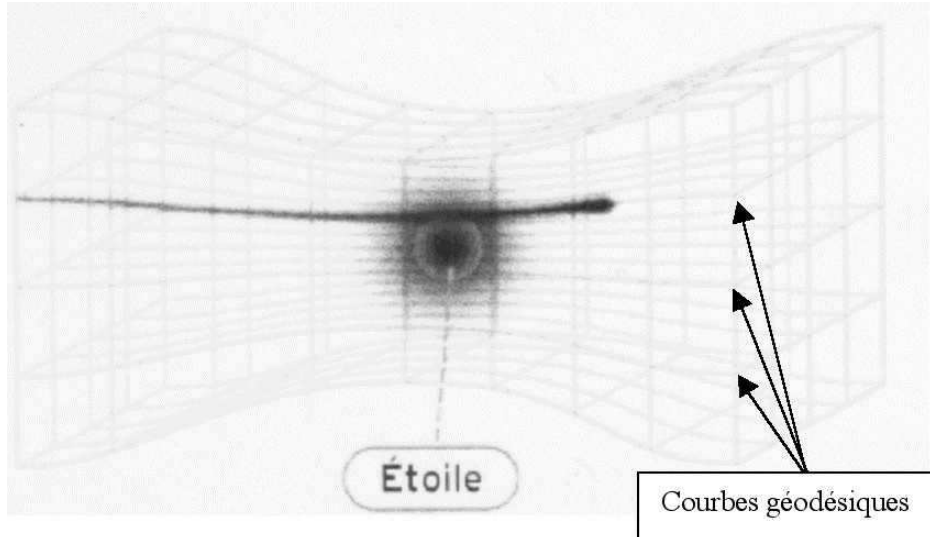
Prenons une nappe bien tendue. Mettons une bille au centre. On peut alors constater que la nappe s'est déformée : un creux s'est formé. Remplaçons la nappe par l'[espace-temps](#), l'unification des trois dimensions habituelles et du temps. Mettons une planète au centre. L'[espace-temps](#) se déforme: il s'est courbé à cause de la présence de la planète.

Le trajet de la lumière -en tant qu'elle est aussi une particule- sera influencé par la présence d'un astre : sa trajectoire va être déviée aux alentours de l'astre.

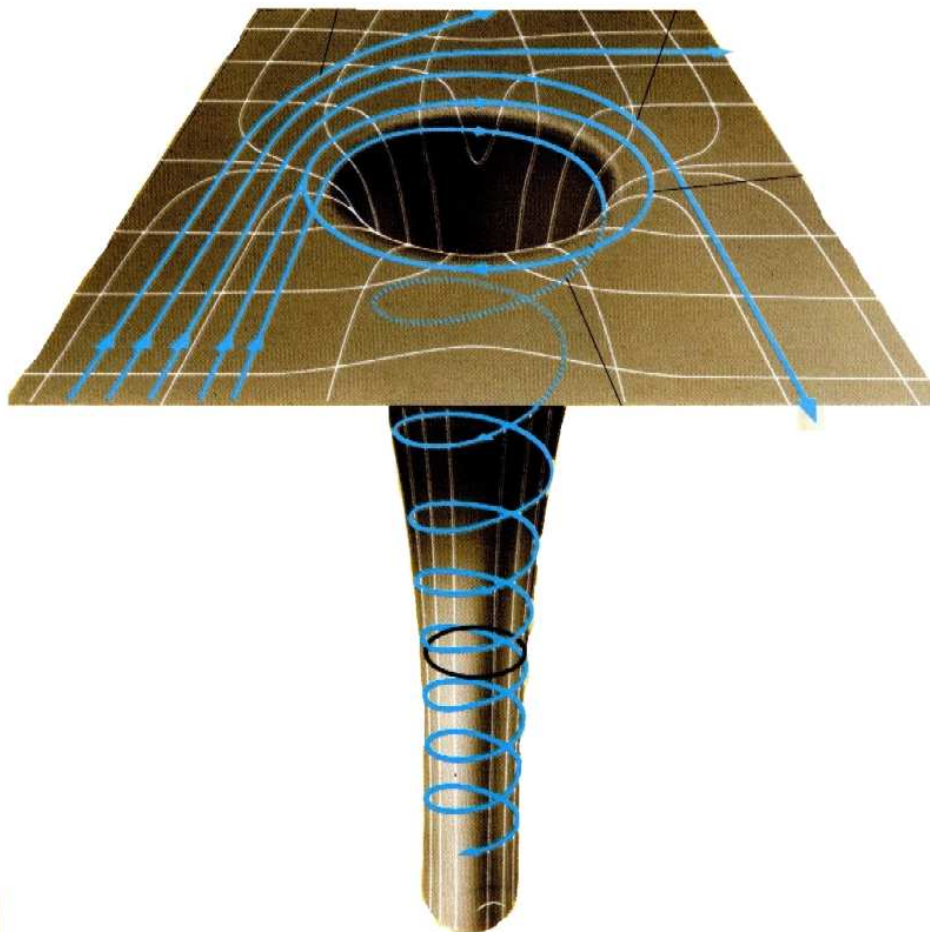
Cela est dû à la [gravitation](#).

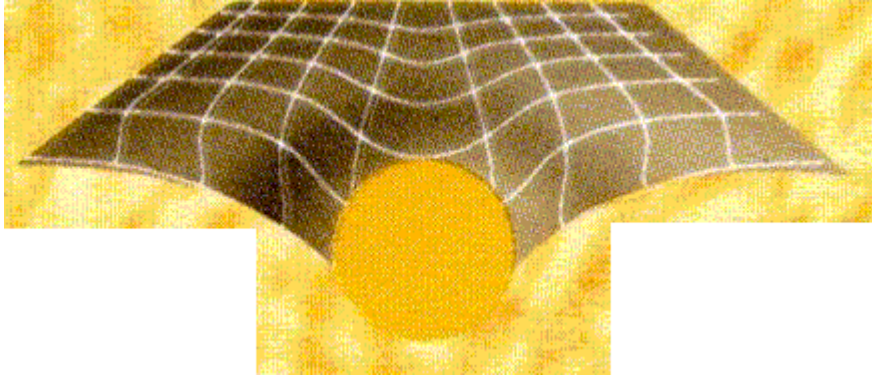
Une nouvelle conception de la [gravitation](#) s'impose. La nappe est composée de fils. Lorsqu'elle est tendue, les fils sont parallèles entre eux et droits. Lorsque la bille est posée sur la nappe, les fils

sont courbés et ne sont plus parallèles entre eux. Par analogie, les "fils" de notre espace-temps sont les [courbes géodésiques](#), c'est-à-dire des lignes qui représenteraient les trajets de la lumière. Or, la lumière emprunte toujours le trajet le plus rapide entre deux points. La nouvelle conception de la [gravitation](#), c'est la manifestation de la courbure d'un espace-temps mou.



Pour Newton, l'augmentation de la densité d'un objet se traduit par une vitesse de libération beaucoup plus grande. Pour Einstein, elle se traduit par un "creux" d'espace de plus en plus prononcé.





Notre soleil produit un faible creux. Les planètes et les comètes "roulent" sur ses parois à vitesse modérée