Corrigé de l'examen

*1. Soit un domaine $D = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ et une relation à deux places **R** définie sur D dont on sait que les paires ordonnées suivantes lui appartiennent : $< a, f >, < e, d >, < c, g >, < f, e >, < b, c >$.*

*On pose de plus que **R** est une relation transitive.*

*a. Quelles autres paires ordonnées d'éléments de D appartiennent-elles à **R** ?*

Il faut donc que si deux paires de la forme $< \alpha, \beta >$ et $\beta, \gamma >$ appartiennent à **R**, la paire de la forme $< \alpha, \gamma >$ appartiennent également à **R**.

D'après le données préliminaires, on constate que :

- $< a, f >$ et $< f, e >$ appartiennent à **R**, donc il faut que la paire $< a, e >$ appartienne à **R**.

- $< f, e >$ et $< e, d >$ appartiennent à **R**, donc il faut que la paire $< f, d >$ appartienne à **R**.

- $< b, c >$ et $< c, g >$ appartiennent à **R**, donc il faut que la paire $< b, g >$ appartienne à **R**.

On arrive donc à :

$< a, f >, < e, d >, < c, g >, < f, e >, < b, c >, < a, e >, < f, d >, < b, g >$ appartiennent à **R**.

On recommence l'examen, et l'on constate que :

- $< a, f >$ et $< f, d >$, tout comme les paires $< a, e >$ et $< e, d >$ appartiennent à **R**, donc il faut que $< a, d >$ appartienne à **R**.

On arrive maintenant à :

$< a, f >, < e, d >, < c, g >, < f, e >, < b, c >, < a, e >, < f, d >, < b, g >, < a, d >$ appartiennent à **R**.

Il n'y a plus, dans **R**, de paires de la forme $< \alpha, \beta >$ et $\beta, \gamma >$, alors que la paire de la forme $< \alpha, \gamma >$ ne s'y trouverait pas.

*b. Existe-t-il un ou des éléments de D qui n'entretiennent la relation **R** avec aucun élément ? Attention : cela n'exclut pas qu'un autre élément de D entretienne la relation R avec ce* *ou ces éléments puisque* **R** *n'est pas censée être symétrique.*

Oui, deux éléments n'entretiennent la relation **R** avec aucun élément de D, à savoir d et g : ces deux éléments ne figurent en première position dans aucune des paires appartenant à **R**.

b'. Si tel est le cas, quelle formule <u>close</u> *de* $\mathcal{L}$ *exprime cette circonstance, en convenant que* **R** *est l'interprétation de la lettre de prédicat* R *?*

Cela s'exprime par : $\exists x, \forall y \sim Rxy$.

2. Démontrez par la méthode des arbres qu'une relation euclidienne et symétrique est transitive.

Il faut faire l'arbre pour la formule :

$$\{\forall x, \forall y, \forall z[(Rxy \wedge Rxz) \Rightarrow Ryz] \wedge \forall x, \forall y(Rxy \Rightarrow Ryx)\} \Rightarrow \forall x, \forall y, \forall z[(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz]$$

$$\forall x, \forall y, \forall z[(Rxy \wedge Rxz) \Rightarrow Ryz] \quad (1)$$

$$\forall x, \forall y(Rxy \Rightarrow Ryx) \quad (2)$$

$$\sim\forall x, \forall y, \forall z[(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz] \quad (3)$$

$$\sim[(Rab \wedge Rbc) \Rightarrow Rac] \quad (4)$$

$$Rab \wedge Rbc \quad (5)$$

$$\sim Rac \quad (6)$$

$$Rab \quad (7)$$

$$Rbc \quad (8)$$

$$Rab \Rightarrow Rba \quad (9)$$

- $\sim Rab$ (10)
  X
- Rba (11)
  $(Rba \wedge Rbc) \Rightarrow Rac$ (12)
  - $\sim(Rba \wedge Rbc)$ (13)
    - $\sim Rba$ (15)
      X
    - $\sim Rbc$ (16)
      X
  - Rac (14)
    X

Règles suivies : (1), (2) et (3) viennent du traitement habituel de la formule initiale de l'arbre, qui est de la forme $\sim[(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \theta]$. (4) de (3) par la règle « $\sim\forall$ » trois fois (trois constantes nouvelles) ; (5), (6) de (4) par la règle « $\sim\Rightarrow$ » ; (7), (8) de (5) par la règle « $\wedge$ » ; (9) de (2) par la règle « $\forall$ » deux fois (constantes anciennes) ; (10), (11) de (9) par la règle « $\Rightarrow$ » ; (12) de (1) par la règle « $\forall$ » trois fois (constantes anciennes) ; (13), (14) de (12) par la règle « $\Rightarrow$ » ; (15), (16) de (13) par la règle « $\sim\wedge$ ».

Le choix des constantes pour traiter les universelles (1) et (2) se comprend de lui-même.

*3. Soit **R**, une relation d'ordre total, définie sur un domaine D. Quelle formule « exprime » qu'il y a un premier élément relativement à **R** ? un dernier élément relativement à **R** ?*

- S'il y a un premier élément relativement à **R**, disons a, c'est que a entretient la relation **R** avec les autres éléments (ce qui est acquis par la « dichotomie » i.e. $\forall x \forall y (Rxy \vee Ryx)$ et la transitivité) , mais qu'aucun élément n'entretient cette relation avec a. Ce qui s'exprime par : $\exists x, \forall y (x \neq y \Rightarrow \sim Ryx)$

- S'il y a un dernier élément relativement à **R**, disons a, c'est que les autres entretiennent la relation **R** avec a (même remarque que ci-dessus), mais que a n'entretient la relation **R** avec aucun autre élément. Ce qui s'exprime par : $\exists x, \forall y (x \neq y \Rightarrow \sim Rxy)$.

L'ajout de la condition $x \neq y$ dans ces deux formules est nécessaire puisque, **R** étant supposée réflexive, une formule comme $\exists x, \forall y \sim Ryx$ serait tout simplement fausse dans le domaine considéré.

On pouvait se contenter de remarquer que le fait qu'il y ait un premier élément est la négation du fait qu'il n'y en ait pas qui est exprimé par la formule donnée dans le fascicule (p. 67). Ce qui donne, pour l'existence d'un premier élément :

- il n'y a pas de premier élément relativement à **R** : $\forall x, \exists y (Ryx \wedge x \neq y)$

- négation de cette formule : $\sim \forall x, \exists y (Ryx \wedge x \neq y)$, ce qui est équivalent à : $\exists x, \forall y \sim (Ryx \wedge x \neq y)$, qui est équivalent à : $\exists x, \forall y (Ryx \Rightarrow \sim x \neq y)$, d'où par contraposition : $\exists x, \forall y (x \neq y \Rightarrow \sim Ryx)$. Même chose pour l'autre formule.

4. Tristram Shandy mettait ni plus ni moins qu'une année pour raconter une journée de sa vie. Supposons que Tristram Shandy soit immortel. Réussira-t-il, à ce rythme, à raconter la totalité de sa vie ?

Rappel élémentaire : un ensemble (une « totalité ») est infini ssi il est en correspondance un-un (bijection) avec une de ses parties propres : par ex., à chaque nombre entier naturel correspond un entier naturel pair et réciproquement, etc. Autrement dit, s'agissant d'un ensemble infini, la notion commune d'Euclide « le tout est "plus grand" que la partie » n'est pas valide.

C'est exactement la situation de Tristram Shandy puisqu'il est supposé vivre une infinité de jours et donc d'années : à chaque journée de sa vie qu'il raconte correspond une année de sa vie et réciproquement ; autrement dit sa vie compte « autant » d'années que de journées. Il peut donc raconter toutes les journées de sa vie.

On peut raisonner par l'absurde : supposons qu'il commence son autobiographie à l'âge de 20 ans et qu'il ne puisse raconter le n-ème jour de sa vie, cela voudrait dire qu'il est mort à $20 + (n - 1)$ ans, ce qui contredit l'hypothèse de son immortalité.