

Logique des prédicats du premier ordre

Chapitre 1

Syntaxe, sémantique ; lois logiques

1.1 Vocabulaire, grammaire du langage \mathcal{L} pour le calcul des prédicats

On définit \mathcal{L} , langage pour le calcul des prédicats, comme suit :

1. Liste des symboles :
 - a) un ensemble dénombrable V de variables d'individu : $\{x_n : n \in \omega\}$; quand cela sera possible, on utilisera x, y, \dots à la place des x_i ;
 - b) un ensemble dénombrable P de lettres de prédicat : $\{P_n : n \in \omega\}$; à chaque P_n est associé son degré, $k(n)$, nombre de ses places d'argument (à ne pas confondre avec le degré d'une formule = le nombre des connecteurs et des quantificateurs de la formule, cf. plus loin); quand cela sera possible on utilisera les majuscules latines P, Q, \dots à la place des P_i .
 - c) les connecteurs : \sim, \wedge (on peut introduire \vee et \Rightarrow par définition);
 - d) le quantificateur : \exists (on peut introduire \forall par définition : $\forall = \sim \exists \sim$);
 - e) symboles impropres : les parenthèses : $), (,], [, \}$, $\{ \dots$

2. Règles de formation (définition récursive de "être une formule bien formée") :

Une formule de \mathcal{L} est une suite *finie* de symboles de \mathcal{L} .

- i. Une formule atomique (ou élémentaire) de \mathcal{L} est une suite de la forme

$$P_n(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k(n)}})$$

Le premier indice “ i ” des variables indique que l’on prend des variables d’indice quelconque dans l’ensemble $V = \{x_n : n \in \omega\}$; les sous-indices : $1, 2, \dots, k(n)$ indiquent qu’il y a exactement $k(n)$ variables, $k(n)$ désignant le nombre de place de la lettre de prédicat.

Une formule atomique est donc une suite de $k(n) + 1$ symboles (sans compter les parenthèses), à savoir, une lettre de prédicat à $k(n)$ places, suivie de $k(n)$ variables d’individu. Par la suite on omettra, lorsqu’il n’y aura pas d’ambiguïté, les parenthèses autour des variables.

ii . Définition récursive d’une formule :

- a) une formule atomique est une formule ;
- b) si φ est une formule, alors $\sim\varphi$, est une formule ;
- c) si φ et ψ sont des formules, alors $\varphi \wedge \psi$ est une formule ;
- d) si φ est une formule, alors $\exists x\varphi$ est une formule ;
- e) seules sont des formules les suites de symboles de \mathcal{L} obtenues au terme d’un nombre fini d’applications de a)-e).

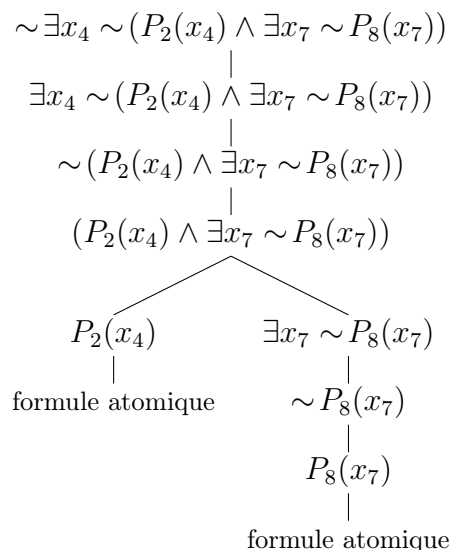
L’ensemble des formules bien formées est noté F .

Remarque : φ, ψ, θ , etc. sont des variables (éventuellement indicées) du métalangage désignant des formules quelconques du langage objet ; ces lettres n’appartiennent donc pas au langage objet.

On voit d’après ces règles de formation, qu’il n’y a qu’un nombre fini et très limité de types (syntaxiques) de formule distincts : outre les formules atomiques et négations de formule atomique, on ne trouve dans \mathcal{L} que des formules de type conjonction, négation de conjonction, existentiel et négation d’existential. Même si l’on introduisait officiellement la disjonction, l’implication et le quantificateur universel, on n’aurait encore affaire qu’à un nombre somme toute très petit de types de formule distincts. De plus, on peut spécifier de manière parfaitement univoque pour chaque formule de quel type elle est. C’est ce qui rend un langage comme \mathcal{L} si commode, comparativement à la profusion et à l’ambiguïté des types grammaticaux de phrase que l’on trouve dans les langages naturels.

1.1. VOCABULAIRE, GRAMMAIRE DU LANGAGE \mathcal{L} POUR LE CALCUL DES PRÉDICATS 5

Comme en propositionnel, on peut associer à toute formule son arbre de décomposition.. Exemple (on vérifiera que chaque formule est obtenue à partir de la (ou des) formule(s) de la ligne du dessous, conformément à l’une des clauses a) - d) ci-dessus) :



3. Degré d’une formule.

On définit récursivement une fonction “ dg ” qui va de l’ensemble des formules vers l’ensemble des entiers naturels positifs ou nul ($dg : F \rightarrow \mathbb{N}$), par les clauses suivantes (pour se remettre en mémoire ce qu’est une “fonction”, voir à la fin l’appendice sur quelques notions élémentaires de théorie des ensembles) :

- si φ est une formule élémentaire, $dg(\varphi) = 0$
- si $dg(\varphi) = n$, $dg(\sim \varphi) = n + 1$
- si $dg(\varphi) = n$, $dg(\exists x \varphi) = n + 1$
- si $dg(\varphi) = n$ et $dg(\psi) = m$, alors $dg(\varphi \wedge \psi) = n + m + 1$

On constate facilement que cela revient à définir le degré d’une formule comme étant le nombre de connecteurs et de quantificateurs qui figurent dans la formule. Par exemple, la formule :

$$\sim \exists x_4 \sim (P_2(x_4) \wedge \exists x_7 \sim P_8(x_7))$$

est de degré 6¹.

Cette notion de "degré d'une formule" est importante car elle permet de raisonner par récurrence sur l'ensemble des formules².

4. Occurrence libre (liée) d'une variable dans une formule; portée d'un quantificateur.

Soit φ une formule de \mathcal{L} et x une variable figurant dans φ ; on définit récursivement "x a une occurrence libre dans φ " par :

- si φ est une formule atomique, x a une occurrence libre dans φ .
- si φ est de la forme $\sim\psi$, x a une occurrence libre dans φ ssi x a une occurrence libre dans ψ .
- si φ est de la forme $\psi \wedge \theta$, x a une occurrence libre dans φ ssi x a une occurrence libre dans ψ ou x a une occurrence libre dans θ .
- si φ est de la forme $\exists y\psi$, x a une occurrence libre dans φ ssi x a une occurrence libre dans ψ et $x \neq y$.

Dans une formule φ de la forme $\exists x\psi$, si x a une occurrence libre dans ψ , alors on dit que x est *liée* dans ψ par le quantificateur existentiel " $\exists x$ " précédant immédiatement la formule ψ . La formule ψ est dite être la *portée* du quantificateur existentiel en x . En général, dans une formule, la portée d'un quantificateur est la plus petite sous-formule qui suit immédiatement le quantificateur.

Lorsque dans une formule φ aucune variable n'a d'occurrence libre (autrement dit, lorsque toutes les variables sont liées), on dit que φ est une formule *close*.

- Note 1 : pour des raisons sémantiques que l'on verra plus loin, il est toujours possible de "renommer" une variable liée, c'est à dire que l'on peut toujours changer une variable liée pour une autre n'ayant pas d'occurrence libre dans la formule. Lorsqu'une même variable a une ou des occurrences libres et une ou des occurrences liées dans une même formule, il est préférable, pour des raisons de lisibilité, de la "renommer" dans ses occurrences liées. Par contre, on ne peut toucher aux variables dans leurs occurrences libres.

Exemple :

$$\forall x\forall y(Rxz \wedge Py) \Rightarrow \exists zRyz$$

-
1. Dorénavant, on écrira une formule de ce genre : $\forall x(Px \wedge \exists y \sim Qy)$.
 2. Attention à ne pas confondre degré d'une formule et degré (ou arité) d'un prédicat.

La portée du quantificateur universel en x est la sous-formule $\forall y(Rxz \wedge Py)$ et x , qui a une occurrence libre dans cette sous formule, est donc lié par ce quantificateur. La portée du quantificateur universel en y est la sous-formule $Rxz \wedge Py$ et y qui a une occurrence libre dans cette sous formule est donc lié par ce quantificateur. z , dans cette sous-formule, n'est pas dans la portée d'un quantificateur et y a donc une occurrence libre.

La portée du quantificateur existentiel en z est la sous-formule Ryz et z qui a une occurrence libre dans cette sous formule, est donc lié par ce quantificateur ; z a donc une occurrence libre dans la première sous-formule et liée dans la seconde. Par contre, dans la sous-formule $\exists zRyz$, y a une occurrence libre. y a donc une occurrence liée dans la première sous-formule et libre dans la seconde. Il est donc préférable en pratique (mais théoriquement inutile) de changer dans la première sous-formule y pour t (par ex.) qui n'a pas d'occurrence libre dans cette même sous-formule. Même remarque pour la variable z que l'on change pour u dans la deuxième sous-formule On obtient ainsi la formule :

$$\forall x \forall t (Rxz \wedge Pt) \Rightarrow \exists u Ryu$$

- Note 2 : soit φ une formule dans laquelle la variable x , et elle seule, a une ou plusieurs occurrences libres ; on appelle la formule $\forall x\varphi$, la *clôture universelle* de φ et $\exists x\varphi$, la *clôture existentielle* de φ . Plus généralement, si dans une formule les variables x_{i_1}, \dots, x_{i_n} et elles seules ont des occurrences libres, les formules $\forall x_{i_1}, \dots, \forall x_{i_n}\varphi$ et $\exists x_{i_1}, \dots, \exists x_{i_n}\varphi$ sont appelées respectivement clôture universelle et clôture existentielle de φ . Ainsi,

$$\forall z \forall y \{ \forall x \forall t (Rxz \wedge Pt) \Rightarrow \exists u Ryu \}$$

est la clôture universelle de la formule de l'exemple précédent et

$$\exists z \exists y \{ \forall x \forall t (Rxz \wedge Pt) \Rightarrow \exists u Ryu \}$$

en est la clôture existentielle

1.2 Interprétation, évaluation

1.2.1 Remarques préliminaires.

Intuitivement, les formules atomiques de notre langage \mathcal{L} sont destinées à signifier qu'un objet a une propriété ou que des objets entretiennent des relations. Pour évaluer ces formules, il faut savoir comment *interpréter* les variables d'individu ainsi que les lettres de prédicat.

1. Pour interpréter les variables d'individu, on se donne un domaine d'objets (un ensemble), D , et on indique pour chaque variable d'individu quel objet elle désigne. Par exemple, si l'on se donne un domaine qui comporte trois objets, il

faut indiquer pour chaque variable lequel de ces trois objets elle désigne. Une interprétation i des variables d'individu est donc une *fonction* (voir appendice A, p. 73) $i : V \rightarrow D$.

2. Pour interpréter les lettres de prédicats, l'affaire est un peu plus délicate. On admettra que deux relations (à n places) sont identiques si elles ont la même extension, c'est à dire si elles valent pour les mêmes n -uplets d'objets du domaine. Cela revient à assimiler les propriétés ou relations à des ensembles.

Exemple : soit un petit domaine $D = \{\text{Jules, Alfred et Hector}\}$. Jules et Hector sont à la fois beaux et intelligents alors qu'Alfred n'est ni beau ni intelligent. Les deux propriétés "être beau" et "être intelligent" valent pour exactement les mêmes objets et donc, logiquement, nous ne les distinguerons pas : il s'agit du même sous-ensemble de D , à savoir $\{\text{Jules, Hector}\}$. Au lieu donc de dire "Jules est beau", nous pouvons dire "Jules appartient à la classe $\{\text{Jules, Hector}\}$ ", ce qui peut tout aussi bien vouloir dire ("intuitivement") que Jules est intelligent. De la même manière, Alfred déteste Hector, tout comme il le jalouse. Personne d'autre ne déteste ni ne jalouse personne d'autre. Nous confondrons donc les deux relations "détester" et "être jaloux de".

Plus généralement, deux propriétés (relations à une place) P et Q sont identiques si la classe (ou l'ensemble) des objets qui sont P est identique à la classe des objets qui sont Q . De la même manière, deux relations à deux places R et S sont identiques, si la classe des *paires ordonnées* d'objets, qui entretiennent la relation R est identique à la classe des *paires ordonnées* d'objets qui entretiennent la relation S (pour plus de détails sur quelques notions ensemblistes, voir, là encore, l'appendice A, p. 73). On peut donc, en général, confondre une relation à n places ($n \geq 1$) avec la classe des n -uplets d'objets entretenant cette relation.

1.2.2 Ensemble des propriétés et relations relativement à un domaine D .

Une lettre de prédicat à une place est destinée à désigner une propriété que peuvent avoir les objets du domaine D que l'on s'est donné ; une lettre de prédicats à deux places est destinée à désigner une relation "dyadique" que peuvent entretenir les objets du domaine que l'on s'est donné, etc.

L'idée fondamentale ici est que, dès lors que le domaine d'objets est donné, l'ensemble des propriétés et relations à deux ou plus de deux places que peuvent avoir ou

entretenir les objets du domaine, est entièrement déterminé. Cela est la conséquence du parti pris extensionnaliste : comme on vient de le voir informellement, on assimile une propriété à un sous-ensemble du domaine (autrement dit au sous-ensemble des objets qui, intuitivement, ont la propriété) ; l'ensemble des propriétés est donc l'ensemble des parties du domaine, i.e. $\wp(D)$. De la même manière, on assimile une relation à deux places à un sous-ensemble de l'ensemble des paires ordonnées d'éléments du domaine, i.e. à un sous ensemble de D^2 ; l'ensemble des relations à deux places est donc l'ensemble des parties de l'ensemble des paires ordonnées d'éléments de D , i.e. $\wp(D^2)$.

En général, donc, une relation à n places est un sous ensemble de D^n , et l'ensemble des relations à n places est $\wp(D^n)$.

Ainsi par exemple, si l'on a affaire à un domaine D à trois éléments, on peut définir à partir de lui 8 propriétés distinctes, à savoir les 8 sous-ensembles de D , 2^3 (c'est à dire 8) relations à deux places distinctes, à savoir les 2^3 sous-ensembles de D^2 , 2^{2^3} (c'est à dire 8 128) relations à trois places distinctes, etc.

On exprimera donc le fait que n objets du domaine, a_1, \dots, a_n , (dans cet ordre) entretiennent la relation \mathbf{R} à n places, par $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in \mathbf{R}$. En particulier, on exprimera le fait que a a la propriété \mathbf{P} , par $a \in \mathbf{P}$.

1.2.3 Définition de “être vrai dans un domaine D pour une interprétation i des variables d'individu”.

On suppose donnés un domaine D et une interprétation des lettres de prédicat. Par convention on admettra que les lettres grasses \mathbf{P}_n sont les interprétations des lettres de prédicats P_n de même indice ; les nombres de place des lettres de prédicat et des relations de même indice sont supposés identiques. Par commodité, on utilisera plus volontiers P, Q, R, S , etc. pour les lettres de prédicat et $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S}$, etc. respectivement pour leur interprétation.

Dans ce qui suit, une interprétation i' sera dite x -variante (ou y -variante, ou z -variante, etc.) d'une interprétation i , si i' ne diffère éventuellement de i que par la valeur donnée à x (ou à y , ou à z , etc.). On admet donc qu'une interprétation i est x (ou y , ou z , etc.)-variante d'elle même. Ainsi, si i' est une x -variante de i , i' donne à toutes les variables différentes de x la même valeur que celle que leur donne i , mais peut donner une valeur différente à x .

Soit $i : V \rightarrow D$, une interprétation des variables d'individu.

On définit récursivement “ φ est vraie dans D pour (l'interprétation) i ” (ce que l'on note $D \models_i \varphi$ et $D \not\models_i \varphi$ signifie : φ n'est pas vraie dans D pour i) par :

- a) si φ est une formule atomique de la forme $P_n(x_{i_1}, \dots, x_{i_k(n)})$, alors $D \models_i \varphi$ ssi $\langle i(x_{i_1}), \dots, i(x_{i_k(n)}) \rangle \in \mathbf{P}_n$.
- b) si φ est une formule de la forme $\sim\psi$, $D \models_i \varphi$ ssi $D \not\models_i \psi$.
- c) si φ est une formule de la forme $\psi \wedge \theta$, $D \models_i \varphi$ ssi $D \models_i \psi$ et $D \models_i \theta$.
- c') si φ est une formule de la forme $\psi \vee \theta$, $D \models_i \varphi$ ssi $D \models_i \psi$ ou $D \models_i \theta$.
- c'') si φ est une formule de la forme $\psi \Rightarrow \theta$, $D \models_i \varphi$ ssi $D \not\models_i \psi$ ou $D \models_i \theta$.
- d) si φ est de la forme $\exists x\psi$, $D \models_i \varphi$ ssi $D \models_{i'} \psi$ pour au moins une interprétation i' , x -variante de i .
- d') si φ est de la forme $\forall x\psi$, $D \models_i \varphi$ ssi $D \models_{i'} \psi$ pour toute interprétation i' , x -variante de i .

Remarque 1 : les clauses c'), c'') et d') ne sont là que pour mémoire puisque \mathcal{L} ne comporte officiellement que la négation, la conjonction et le quantificateur existentiel.

Remarque 2 : dans ces clauses, écrites dans le métalangage (i.e. le français appauvri dont on se sert ici), apparaissent des “constantes logiques” : “non” (camouflé dans “ $\not\models$ ”) “ou”, “et”, “ssi” “pour au moins une”, “pour tout”. Ces expressions ont exactement les mêmes propriétés logiques que les connecteurs ($\sim, \vee, \wedge, \Leftrightarrow$ respectivement) et quantificateurs (\exists, \forall , respectivement) du langage \mathcal{L} . Il en résulte en particulier que l'on peut utiliser les lois logiques habituelles et en particulier la loi qu'exprime la tautologie : $(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow (\sim\varphi \Leftrightarrow \sim\psi)$ (contraposition généralisée). La clause c''), par exemple, peut être ainsi transformée : c'') si φ est une formule de la forme $\psi \Rightarrow \theta$, non- $D \models_i \varphi$ (i.e. $D \not\models_i \varphi$) ssi non- $(D \not\models_i \psi$ ou $D \models_i \theta)$ ssi $D \models_i \psi$ et $D \not\models_i \theta$ (de Morgan).

Autrement dit, et en tenant compte de la clause a) :

- c'') si φ est une formule de la forme $\psi \Rightarrow \theta$, $D \models_i \sim\varphi$ ssi $D \models_i \psi$ et $D \not\models_i \theta$.

On peut ainsi obtenir les clauses pour les négations de conjonction, de disjonction, d'implication, d'existentielle et d'universelle.

Remarque 3 : il suit des clauses d) et d') que la vérité ou la fausseté d'une formule **close** dans un domaine D ne dépend pas de l'interprétation donnée des variables d'individu ; elle ne dépend que de l'interprétation des lettres de prédicat. Si une interprétation des lettres de prédicat est fixée et si φ est une formule close, on écrit $D \models \varphi$, (ou $D \not\models \varphi$) sans mentionner d'interprétation des variables d'individu.

Exemple d'évaluation.

Soit φ la formule : $\forall x \exists y Rxy \Rightarrow Pz$.

On stipule les données suivantes :

- $D = \{a, b, c\}$
- $\mathbf{R} = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, c \rangle \}$; rappel : $\mathbf{R} \subseteq D^2$ i.e. $\mathbf{R} \in \wp(D^2)$
- $\mathbf{P} = \{a, c\}$; rappel : $\mathbf{P} \subseteq D$, i.e. $\mathbf{P} \in \wp(D)$.

Soit, maintenant, l'interprétation i telle que $i(x) = a$, $i(y) = a$ et $i(z) = b$.

Evaluation de φ dans D pour l'interprétation i :

$D \models_i \forall x \exists y Rxy \Rightarrow Pz$ ssi $D \not\models_i \forall x \exists y Rxy$ ou $D \models_i Pz$ (clause c').

On va donc évaluer l'antécédent dans D pour i : s'il s'avère que $D \not\models_i \forall x \exists y Rxy$, on pourra en conclure que $D \models_i \varphi$ sans autre forme de procès ; sinon il faudra également évaluer le conséquent.

Evaluation de l'antécédent de φ :

$D \models_i \forall x \exists y Rxy$ ssi $D \models_{i'} \exists y Rxy$ pour toute interprétation i' , x -variante de i (clause d').

Il faut donc passer en revue les trois interprétations x -variantes de i , à savoir :

$$\begin{array}{l} \underline{i'(x) = a}, \quad i'(y) = a, \quad i'(z) = b \quad (\text{cette interprétation n'est autre que } i). \\ \underline{i''(x) = b}, \quad i''(y) = a, \quad i''(z) = b \\ \underline{i'''(x) = c}, \quad i'''(y) = a, \quad i'''(z) = b \end{array}$$

- **1er cas.** Examen de $D \models_{i'} \exists y Rxy$, avec $i'(x) = a, i'(y) = a, i'(z) = b$:

$D \models_{i'} \exists y Rxy$ ssi $D \models_j Rxy$ pour au moins une interprétation j , y -variante de i' (clause d)).

Comme $\langle a, b \rangle \in R$, on peut donc définir j , y -variante de i' , par $j(x) = a, j(y) = b$ et $j(z) = b$, de sorte que $D \models_j Rxy$ puisqu'alors $\langle j(x), j(y) \rangle = \langle a, b \rangle$ (clause a)).

Donc $D \models_{i'} \exists y Rxy$.

- **2ème cas.** Examen de $D \models_{i''} \exists y Rxy$, avec $i''(x) = b, i''(y) = a, i''(z) = b$:

$D \models_{i''} \exists y Rxy$ ssi $D \models_j Rxy$ pour au moins une interprétation j , y -variante de i'' (clause d)).

Comme $\langle i''(x), i''(y) \rangle \in R$ (puisque $\langle b, a \rangle \in \mathbf{R}$), il suffit de faire $j = i''$ et on a : $D \models_j Rxy$ (clause a)).

Donc $D \models_{i''} \exists y Rxy$

- **3ème cas.** Examen de $D \models_{i'''} \exists y Rxy$, avec $i'''(x) = c, i'''(y) = a, i'''(z) = b$:

$D \models_{i'''} \exists y Rxy$ ssi $D \models_j Rxy$ pour au moins une interprétation j , y -variante de i''' (clause d)).

Comme $\langle c, c \rangle \in R$, on peut donc définir j , y -variante de i''' , par $j(x) = c, j(y) = c$ et $j(z) = b$, de sorte que $D \models_j Rxy$ puisqu'alors $\langle j(x), j(y) \rangle = \langle c, c \rangle$ (clause a)).

Donc $D \models_{i'''} \exists y Rxy$.

On voit que $\exists y Rxy$ est vraie dans D pour les trois interprétations $i' - i'''$. Il en résulte que $D \models_i \forall x \exists y Rxy$ (clause d)).

Puisque l'on n'a pas $D \not\models_i \forall x \exists y Rxy$, il faut examiner le conséquent de φ .

Evaluation du conséquent de φ :

$D \models_i Pz$ ssi $i(z) \in \mathbf{P}$ (clause a)).

Or $i(z) = b$ et $b \notin \mathbf{P}$, donc $D \not\models_i Pz$.

Puisque l'on n'a ni $D \not\models_i \forall x \exists y Rxy$, ni $D \models_i Pz$ il s'ensuit, par la clause c''), que :

$$D \not\models_i \forall x \exists y Rxy \Rightarrow Pz.$$

Autrement dit la formule φ est fausse dans D pour l'interprétation i des variables d'individu, étant donné l'interprétation des lettres de prédicats \mathbf{P} et \mathbf{R} .

Remarques :

- on voit qu'ici seule l'évaluation du conséquent dépend de l'interprétation i donnée; l'évaluation de l'antécédent aurait abouti au même résultat quelle qu'eût été l'interprétation fixée au départ.
- on voit également que l'on n'a pas besoin de connaître l'interprétation de toutes les variables d'individus; il suffit de savoir quelles valeurs l'interprétation i donne aux seules variables d'individu qui figurent dans la formule; même remarque concernant l'interprétation des lettres de prédicat.

1.3 Satisfiabilité, validité.

1.3.1 Définitions

Soit D , un domaine d'individus. Dans ce qui suit on appellera D -interprétation des lettres de prédicats, une fonction qui associe à chaque lettre de prédicat à n places un élément de $\wp(D^n)$.

De la même manière, on appellera D -interprétation des variables d'individu, une fonction qui associe à chaque variable d'individu un élément de D .

- Une formule de \mathcal{L} est dite *satisfiable dans un domaine D* ssi il existe une D -interprétation des lettres de prédicat et une D -interprétation des variables d'individu pour lesquelles cette formule est vraie. Il suit des définitions précédentes qu'une formule est satisfiable dans un domaine D ssi sa clôture existentielle l'est.
- Une formule de \mathcal{L} est dite *valide dans un domaine D* ssi pour toute D -interprétation des lettres de prédicat et toute D -interprétation des variables d'individu, cette formule est vraie. Il suit des définitions précédentes qu'une formule est valide dans un domaine D ssi sa clôture universelle l'est.

- Une formule de \mathcal{L} est dite *satisfiable* ssi il existe un domaine D , une D -interprétation des lettres de prédicat et une D -interprétation des variables d'individu pour lesquels cette formule est vraie. Il suit des définitions précédentes qu'une formule est satisfiable ssi sa clôture existentielle l'est.
- Une formule est dite *fini-satisfiable*, si elle est satisfiable dans un domaine fini. Sinon, elle est dite infini-satisfiable.
- Un ensemble de formules de \mathcal{L} est dit satisfiable ssi il existe un domaine D , une D -interprétation des lettres de prédicat et une D -interprétation des variables d'individu pour lesquels toutes les formules de cet ensemble sont simultanément vraies.
- Une formule de \mathcal{L} est dite *universellement valide* (ou plus simplement *valide*) ssi pour tout domaine D , toute D -interprétation des lettres de prédicat et toute D -interprétation des variables d'individu, cette formule est vraie. Il suit des définitions précédentes qu'une formule est universellement valide ssi sa clôture universelle l'est.

Mise en garde : comme en propositionnel, il n'y a pas de sens à dire qu'une formule est vraie ou fausse sans plus de précision. Cela n'a de sens que relativement à un domaine D , une D -interprétation des lettres de prédicat et une D -interprétation des variables d'individu (cette dernière donnée est toutefois inutile si l'on a affaire à une formule close).

1.3.2 Relations entre ces propriétés

- Si une formule est satisfiable dans un domaine D , elle est satisfiable.
- Si une formule est valide dans un domaine D , elle est *a fortiori* satisfiable dans D , et donc satisfiable.
- Si une formule est universellement valide, elle est valide dans un domaine D , quelque que soit D . Elle est donc *a fortiori* satisfiable.
- Une formule est universellement valide, ssi sa négation n'est pas satisfiable.

Une formule universellement valide exprime une loi logique.

1.4 Quelques lois logiques.

1.4.1 Règles de passage et mise en forme prénexe.

Remarque préliminaire : dans ce qui suit, l'écriture de la forme $\varphi[x]$ signifie que la variable x a au moins une occurrence libre dans φ ; par ailleurs, on suppose que x n'a pas d'occurrence libre dans la sous-formule ψ des formules a. - d. (prendre garde au parenthésage).

- a. i. $\forall x(\varphi[x] \wedge \psi) \Leftrightarrow (\forall x\varphi[x] \wedge \psi)$ ii. $\exists x(\varphi[x] \wedge \psi) \Leftrightarrow (\exists x\varphi[x] \wedge \psi)$
 b. i. $\forall x(\varphi[x] \vee \psi) \Leftrightarrow (\forall x\varphi[x] \vee \psi)$ ii. $\exists x(\varphi[x] \vee \psi) \Leftrightarrow (\exists x\varphi[x] \vee \psi)$

En raison de la "commutativité" de \wedge et de \vee , que $\varphi[x]$ soit à droite ou à gauche de ces connecteurs est indifférent. Par contre dans les formules suivantes, il importe de prendre en considération la place de $\varphi[x]$.

- c. i. $\forall x(\varphi[x] \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\exists x\varphi[x] \Rightarrow \psi)$ ii. $\exists x(\varphi[x] \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\forall x\varphi[x] \Rightarrow \psi)$
 d. i. $\forall x(\psi \Rightarrow \varphi[x]) \Leftrightarrow (\psi \Rightarrow \forall x\varphi[x])$ ii. $\exists x(\psi \Rightarrow \varphi[x]) \Leftrightarrow (\psi \Rightarrow \exists x\varphi[x])$

Justification de la bi-implication c. i.

$$\begin{aligned} \underline{\forall x(\varphi[x] \Rightarrow \psi)} &\Leftrightarrow \forall x(\sim\varphi[x] \vee \psi) && \text{équivalence : } \Rightarrow / \sim \vee \\ &\Leftrightarrow (\forall x \sim\varphi[x] \vee \psi) && \text{par b. i, ci dessus} \\ &\Leftrightarrow (\sim\exists x\varphi[x] \vee \psi) && \text{par "}\forall \sim\text{" eq. "}\sim\exists\text{"} \\ &\Leftrightarrow (\exists x\varphi[x] \Rightarrow \psi) && \text{équivalence : } \Rightarrow / \sim \vee \end{aligned}$$

La même démarche permet de justifier c. ii.. Par contre, on voit, toujours en suivant la même démarche, que lorsque $\varphi[x]$ est le conséquent de l'implication, le quantificateur n'a pas à être changé.

Rapports entre \forall et \wedge , et entre \exists et \vee .

- e. $\forall x(\varphi[x] \wedge \psi[x]) \Leftrightarrow (\forall x\varphi[x] \wedge \forall x\psi[x])$
 f. $(\forall x\varphi[x] \vee \forall x\psi[x]) \Rightarrow \forall x(\varphi[x] \vee \psi[x])$ (attention, la réciproque n'est pas valide)

- g. $\exists x(\varphi[x] \vee \psi[x]) \Leftrightarrow (\exists x\varphi[x] \vee \exists x\psi[x])$
 h. $\exists x(\varphi[x] \wedge \psi[x]) \Rightarrow (\exists x\varphi[x] \wedge \exists x\psi[x])$ (attention, la réciproque n'est pas valide)

Les "règles de passage" ci-dessus permettent de mettre les formules sous deux formes différentes selon que l'on lit les bi-implications de gauche à droite ou de droite à gauche. Dans le premier cas, on "entre" les quantificateurs au plus près des sous-formules sur lesquelles ils portent ; dans le deuxième cas, on fait "sortir" les quantificateurs en les mettant en tête de la formule toute entière. Une formule dont tous les quantificateurs sont placés en tête, est dite *en forme préfixe*. La suite des quantificateurs qui vient en tête d'une formule en forme préfixe, est appelée la *préfixe* de la formule. On peut toujours mettre une formule en forme préfixe, les deux formules étant équivalentes.

Exemple : Mise en forme préfixe de la formule correspondant au syllogisme en *Darii*

$$\begin{aligned} & \{\forall x(Mx \Rightarrow Px) \wedge \exists y(Sy \wedge My)\} \Rightarrow \exists z(Sz \wedge Pz) \\ & \forall x[(Mx \Rightarrow Px) \wedge \exists y(Sy \wedge My)] \Rightarrow \exists z(Sz \wedge Pz) && \text{par a. i.} \\ & \forall x\exists y[(Mx \Rightarrow Px) \wedge (Sy \wedge My)] \Rightarrow \exists z(Sz \wedge Pz) && \text{par a. ii.} \\ & \exists x\{\exists y[(Mx \Rightarrow Px) \wedge (Sy \wedge My)] \Rightarrow \exists z(Sz \wedge Pz)\} && \text{par c. ii.} \\ & \exists x\forall y\{[(Mx \Rightarrow Px) \wedge (Sy \wedge My)] \Rightarrow \exists z(Sz \wedge Pz)\} && \text{par c. i.} \\ & \exists x\forall y\exists z\{[(Mx \Rightarrow Px) \wedge (Sy \wedge My)] \Rightarrow (Sz \wedge Pz)\} && \text{par d. ii.} \end{aligned}$$

Ordre des quantificateurs dans le "préfixe" d'une formule en forme préfixe.

- Lorsque l'on a affaire à une formule ne comportant que des lettres de prédicat à une place, l'ordre des quantificateurs est indifférent (tel est le cas ci-dessus)
- Lorsque l'on a affaire à une suite de quantificateurs de même genre (universel ou existentiel), l'ordre des quantificateurs, dans cette suite, est indifférent.
- Par contre : l'ordre des quantificateurs n'est pas indifférent lorsqu'ils ne sont pas de même genre et que la formule comporte une ou des lettres de prédicat à deux ou plus de deux places. Par exemple, $\exists x\forall yRxy$ n'est pas équivalent à $\forall y\exists xRxy$; pour s'en convaincre, il suffit d'interpréter R par "est plus grand que" et prendre pour domaine les entiers naturels. La première formule signifie

alors : il existe un nombre plus grand que tout nombre, ce qui est manifestement faux, alors que la seconde signifie : tout nombre est plus petit qu'au moins un nombre, ce qui est manifestement vrai.

1.4.2 Propriétés formelles des relations dyadiques.

Dans le langage ordinaire, nous trouvons des expressions pour des relations (à deux places), comme : "...est plus grand que...", "... est frère ou sœur de...", "...pèse autant que...", etc. et "intuitivement" nous savons que ces relations ont certaines propriétés indépendantes du fait qu'elles se tiennent entre tels ou tels objets. Par exemple, si l'on sait que Pierre est plus grand que Jean et que Jean est plus grand qu'Alfred, on peut en déduire ("logiquement") que Pierre est plus grand qu'Alfred. Cela ne tient pas au fait qu'il s'agit de Pierre; Jean ou Alfred, mais seulement à la "propriété" qu'a la relation exprimée par "...est plus grand que...", d'être "transitive". De la même manière, si l'on sait que Dominique est frère ou sœur de Claude, on en déduit immédiatement que Claude est frère ou sœur de Dominique (relation "symétrique"), tout comme l'on sait ("logiquement") que La Tour Eiffel pèse autant que la Tour Eiffel (relation "réflexive").

On dit de ce genre de propriété des relations qu'elles sont "formelles", en ce sens que l'on peut les exprimer en ne recourant qu'au vocabulaire logique à notre disposition dans le langage \mathcal{L} , de telle sorte que si les formules ci-dessous sont vraies dans un domaine pour l'interprétation \mathbf{R} de la lettre de prédicat R , on peut en conclure que la relation \mathbf{R} a telle ou telle de ces propriétés formelles. Considérons un exemple.

Soit un domaine $D : \{a, b, c, d, e\}$,

et la relation $\mathbf{R} : \{ \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle c, d \rangle, \langle a, e \rangle, \langle b, d \rangle \}$.

Soit maintenant la formule : $\forall x, \forall y, \forall z \{ (Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz \}$.

On remarque que la seule interprétation de x, y et z qui rend vrai l'antécédent de l'implication : $\{ (Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz \}$, est : $i(x) = a, i(y) = c$ et $i(z) = d$; et pour cette interprétation le conséquent de cette l'implication est également vrai. Pour toutes les autres interprétations de x, y et z , l'antécédent est faux et donc l'implication est vraie. Donc $\{ (Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz \}$ est vraie pour toutes les interprétations de x, y et z , d'où : $\forall x, \forall y, \forall z \{ (Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz \}$ est vraie dans D ; \mathbf{R} est donc transitive.

Ces propriétés formelles que peuvent avoir les relations, entretiennent, elles-mêmes, des relations logiques que l'on verra ci-dessous.

Remarque d'intérêt philosophique : si les relations peuvent avoir des propriétés formelles qui peuvent elles-même entretenir des relations logiques, ce n'est pas le cas des classes. Ces dernières ne peuvent avoir aucune propriété formelle au sens ci-dessus, elles sont logiquement "amorphes", si l'on peut dire. C'est pourquoi il y a une "logique des relations", qui est beaucoup plus riche, logiquement, que le simple "calcul des classes" (et non pas "logique des classes"). D'où la pauvreté logique de la vieille syllogistique et de toutes les considérations "philosophiques" qui s'y accrochèrent.

Formules exprimant certaines propriétés formelles des relations dyadiques.

- a. réflexivité totale : $\forall x Rxx$
- a'. réflexivité (simple) : $\forall x, \forall y (Rxy \Rightarrow Rxx)$
- a''. irréflexivité : $\forall x \sim Rxx$
- b. symétrie : $\forall x, \forall y (Rxy \Rightarrow Ryx)$
- b'. asymétrie : $\forall x, \forall y (Rxy \Rightarrow \sim Ryx)$
- c. transitivité : $\forall x, \forall y, \forall z \{ (Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz \}$
- c'. intransitivité : $\forall x, \forall y, \forall z \{ (Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow \sim Rxz \}$
- d. euclidienne : $\forall x, \forall y, \forall z \{ (Rxy \wedge Rxz) \Rightarrow Ryz \}$
- e. sérielle : $\forall x, \exists y Rxy$

Remarques :

- Dans la formule pour la réflexivité simple, il faut prendre garde au fait que l'on a Rxx dans le conséquent et non pas Ryy : les deux formules $\forall x, \forall y (Rxy \Rightarrow Rxx)$ et $\forall x, \forall y (Rxy \Rightarrow Ryy)$ ne sont pas équivalentes ; on peut figurer ainsi ce que "dit" la première formule :

si l'on a : $x \xrightarrow{R} y$, alors on a : x , mais pas nécessairement y ,

$\begin{array}{ccc} \circ & & \circ \\ R & & R \end{array}$

alors que la seconde "dit" :

si l'on a : $x \xrightarrow{R} y$, alors on a : y , mais pas nécessairement x .

$\begin{array}{ccc} \circ & & \circ \\ R & & R \end{array}$

- Il n’y a qu’une formule exprimant l’irréflexivité, puisque $\forall x \sim Rxx$ est équivalent à $\forall x, \forall y (Rxy \Rightarrow \sim Rxx)$.
- Les relations entre a et a”, b. et b’, c et c’, sont des relations de *contrariété* au sens que la tradition aristotélicienne donne à ce terme, du même genre, donc, que la relation de $\forall x (Px \Rightarrow Qx)$ (jugement en A) à $\forall x (Px \Rightarrow \sim Qx)$ (jugement en E, rappel : les contraires ne peuvent être simultanément vrais, mais peuvent être simultanément faux) ; ce ne sont donc pas des relations de *contradiction* : la contradictoire de b., par ex., est $\sim \forall x, \forall y (Rxy \Rightarrow Ryx)$, autrement dit, en faisant usage des équivalences habituelles : $\exists x, \exists y (Rxy \wedge \sim Ryx)$.

Lois reliant ces propriétés

- Transitivité + symétrie implique réflexivité (simple) :

$$\{\forall x, \forall y, \forall z [(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz] \wedge \forall x, \forall y (Rxy \Rightarrow Ryx)\} \Rightarrow \forall x, \forall y (Rxy \Rightarrow Rxx)$$

- Transitivité + symétrie + sérialité implique réflexivité (totale) :

$$\{\forall x, \forall y, \forall z [(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz] \wedge \forall x, \forall y (Rxy \Rightarrow Ryx) \wedge \forall x, \exists y Rxy\} \Rightarrow \forall x Rxx$$

- Asymétrie implique irreflexivité :

$$\forall x, \forall y (Rxy \Rightarrow \sim Ryx) \Rightarrow \forall x \sim Rxx$$

- Transitivité + irreflexivité implique asymétrie :

$$\{\forall x, \forall y, \forall z [(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz] \wedge \forall x \sim Rxx\} \Rightarrow \forall x, \forall y (Rxy \Rightarrow \sim Ryx)$$

- Euclidien + réflexivité (totale) implique symétrie :

$$\{\forall x, \forall y, \forall z [(Rxy \wedge Rxz) \Rightarrow Ryz] \wedge \forall x Rxx\} \Rightarrow \forall x, \forall y (Rxy \Rightarrow Ryx)$$

- Euclidien + réflexivité (totale) implique transitivité :

$$\{\forall x, \forall y, \forall z[(Rxy \wedge Rxz) \Rightarrow Ryz] \wedge \forall x Rxx\} \Rightarrow \forall x, \forall y, \forall z\{(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz\}$$

– Euclidien + symétrie implique transitivité :

$$\{\forall x, \forall y, \forall z[(Rxy \wedge Rxz) \Rightarrow Ryz] \wedge \forall x, \forall y(Rxy \Rightarrow Ryx)\} \Rightarrow \forall x, \forall y, \forall z\{(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz\}$$

– Transitivité + symétrie implique euclidien :

$$\{\forall x, \forall y, \forall z[(Rxy \wedge Rxz) \Rightarrow Ryz] \wedge \forall x, \forall y(Rxy \Rightarrow Ryx)\} \Rightarrow \forall x, \forall y, \forall z\{(Rxy \wedge Rxz) \Rightarrow Ryz\}$$

Sous-relation, converse d'une relation, produit de deux relations

Une relation \mathbf{R} est une *sous-relation* d'une relation \mathbf{S} , autrement dit $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{S}$, ssi toutes les paires ordonnées qui appartiennent à \mathbf{R} appartiennent à \mathbf{S} ; ce que l'on peut exprimer dans notre langage \mathcal{L} par la formule :

$$- \forall x, \forall y(Rxy \Rightarrow Sxy)$$

Si \mathbf{R} est une sous-relation de \mathbf{S} alors, si \mathbf{S} est intransitive, \mathbf{R} est intransitive; même chose si \mathbf{S} est asymétrique ou si \mathbf{S} est irréflexive, ce que l'on peut exprimer dans notre langage \mathcal{L} par les formules :

$$- \{\forall x, \forall y(Rxy \Rightarrow Sxy) \wedge \forall x, \forall y, \forall z[(Sxy \wedge Syz) \Rightarrow \sim Sxz]\} \Rightarrow \forall x, \forall y, \forall z[(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow \sim Rxz]$$

$$- \{\forall x, \forall y(Rxy \Rightarrow Sxy) \wedge \forall x, \forall y(Sxy \Rightarrow \sim Syx)\} \Rightarrow \forall x, \forall y(Rxy \Rightarrow \sim Ryx)$$

$$- \{\forall x, \forall y(Rxy \Rightarrow Sxy) \wedge \forall x \sim Sxx\} \Rightarrow \forall x \sim Rxx$$

A l'inverse, si \mathbf{R} est une sous-relation de \mathbf{S} alors, si \mathbf{S} est transitive, \mathbf{R} n'est pas nécessairement transitive; même chose si \mathbf{S} est symétrique ou si \mathbf{S} est réflexive.

La **converse** \mathbf{R}^{-1} d'une relation \mathbf{R} est la relation qui contient toutes les paires ordonnées de \mathbf{R} , et seulement celles-là, mais dans l'ordre inverse (i.e. $\langle a, b \rangle \in \mathbf{R}^{-1}$ ssi $\langle b, a \rangle \in \mathbf{R}$); ce l'on peut exprimer dans notre langage \mathcal{L} par la formule :

$$- \forall x, \forall y (Rxy \Leftrightarrow R^{-1}yx)$$

On voit facilement que la converse de la converse, $\mathbf{R}^{-1^{-1}}$, d'une relation \mathbf{R} , n'est autre que \mathbf{R} .

Une relation \mathbf{R} est transitive ssi sa converse est transitive; même chose, pour la symétrie et la réflexivité, ce que l'on peut exprimer dans notre langage \mathcal{L} par les formules :

$$- \forall x, \forall y (Rxy \Leftrightarrow R^{-1}yx) \Rightarrow \{\forall x, \forall y, \forall z [(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz] \Leftrightarrow \forall x, \forall y, \forall z [(R^{-1}xy \wedge R^{-1}yz) \Rightarrow R^{-1}xz]\}.$$

$$- \forall x, \forall y (Rxy \Leftrightarrow R^{-1}yx) \Rightarrow \{\forall x, \forall y (Rxy \Rightarrow Ryx) \Leftrightarrow \forall x, \forall y (R^{-1}xy \Rightarrow R^{-1}yx)\}.$$

$$- \forall x, \forall y (Rxy \Leftrightarrow R^{-1}yx) \Rightarrow (\forall x Rxx \Leftrightarrow \forall x R^{-1}xx).$$

La même chose vaut pour l'intransitivité, l'asymétrie et l'irréflexivité.

Le **produit (relatif)** d'une relation \mathbf{R} par une relation \mathbf{S} , $\mathbf{R|S}$, contient toutes les paires $\langle a, c \rangle$, lorsque il existe un élément b , tel que $\langle a, b \rangle \in \mathbf{R}$ et $\langle b, c \rangle \in \mathbf{S}$; i.e. $\langle a, c \rangle \in \mathbf{R|S}$ ssi il existe b tel que $\langle a, b \rangle \in \mathbf{R}$ et $\langle b, c \rangle \in \mathbf{S}$ (ex. : si a est la mère de b qui est père ou mère de c , a est la grand-mère de c ; 'grand-mère' est le produit de 'mère' et 'père ou mère'); ce l'on peut exprimer dans notre langage \mathcal{L} par la formule :

$$\forall x, \forall z (R|Sxz \Leftrightarrow \exists y (Rxy \wedge Syz)).$$

Le produit relatif d'une relation par sa converse est (simplement) réflexif ce que l'on peut exprimer par :

$$\forall x, \forall y (Rxy \Leftrightarrow R^{-1}yx) \Rightarrow \{\forall x, \forall z [R|R^{-1}xz \Leftrightarrow \exists y (Rxy \wedge R^{-1}yz)] \Rightarrow \forall x, \forall y (R|R^{-1}xy \Rightarrow R|R^{-1}xx)\}.$$

De la même manière, le produit relatif d'une relation et de sa converse est symétrique, ce que l'on peut exprimer par :

$$\forall x, \forall y (Rxy \Leftrightarrow R^{-1}yx) \Rightarrow \{ \forall x, \forall z [R|R^{-1}xz \Leftrightarrow \exists y (Rxy \wedge R^{-1}yz)] \Rightarrow \\ \forall x, \forall y (R|R^{-1}xy \Rightarrow R|R^{-1}yx) \}.$$

On note \mathbf{R}^2 le produit d'une relation par elle-même, i.e. $\mathbf{R}|\mathbf{R}$. Plus généralement, on peut "multiplier" une relation par elle-même autant de fois qu'on le souhaite, i.e. à partir d'une relation \mathbf{R} , on peut former \mathbf{R}^2 , \mathbf{R}^3 , \mathbf{R}^4 , etc. (par ex. 'arrière grand-parent' est 'parent'³ : 'parent de parent de parent' en entendant par 'parent', 'père ou mère').

Chapitre 2

Arbres et séquents.

Remarque préliminaire :

La notion de validité universelle, telle qu'elle a été définie ci-dessus n'est pas effective ; contrairement à ce qui est le cas en propositionnel, nous ne pouvons directement nous assurer de la validité d'une formule en passant en revue tous les domaines, toutes les interprétations des lettres de prédicat et toutes les interprétations des variables d'individu, puisqu'il y en a une infinité.

C'est pourquoi, il nous faut faire le détour soit par un système axiomatique, soit par un système de "déduction naturelle", soit par les méthodes de contre-exemple comme la méthode dite "des arbres" (ou des "tableaux sémantiques").

2.1 Principe général de la méthode des arbres.

En vertu de ce qui précède, qu'une formule soit valide équivaut au fait que sa négation n'est pas satisfiable. De la même manière, une formule n'est pas valide si et seulement si sa négation est satisfiable. Pour savoir si une formule φ est valide, on peut donc se demander si sa négation, $\sim\varphi$, est satisfiable ou non ; si, oui, φ n'est pas valide, si non, φ est valide.

Il faudrait donc disposer d'une méthode systématique qui permette d'être assuré en un nombre fini d'étapes qu'une formule n'est pas satisfiable si tel est bien le cas. La méthode des arbres pour les formules du premier ordre satisfait ce double réquisit. Notons tout de suite, que pour les formules du premier ordre, elle ne satisfait pas un autre réquisit qui peut sembler voisin, à savoir de permettre d'être assuré en un nombre fini d'étapes qu'une formule quelconque est satisfiable si tel est bien le cas.

En revanche la même méthode appliquée aux formules du calcul des propositions satisfait ce dernier réquisit. On reviendra plus loin sur ce point important.

Comme en propositionnel, cette méthode repose sur le fait que la structure syntaxique d'une formule complexe est en correspondance étroite avec les règles d'évaluation ; autrement dit, les propriétés sémantiques des formules peuvent s'exprimer en termes syntaxiques. *On ne considérera dans ce qui suit que des formules closes.*

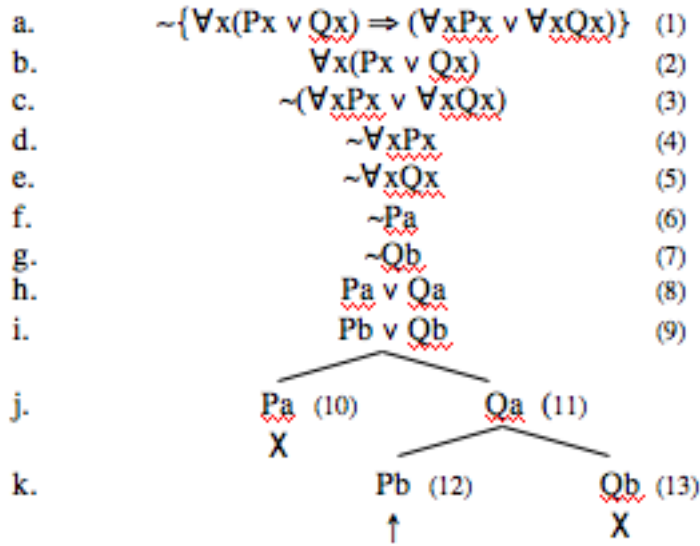
Il s'agit donc d'analyser une formule de sorte à faire apparaître éventuellement quelles formules élémentaires figurant en elle doivent être vraies dans un domaine et pour une interprétation des lettres de prédicat et lesquelles doivent être fausses dans le même domaine et pour la même interprétation, de sorte que la formule soit elle-même vraie dans le même domaine et pour la même interprétation. En cas d'échec de cette recherche, on en conclut qu'elle n'est pas satisfiable ; sa négation est donc valide.

La méthode des arbres étant destinée à prouver la validité éventuelle des formules auxquelles on l'applique, en vertu de ce qui précède, si une formule contient une ou des variables libres, on appliquera la méthode à sa *clôture universelle*. Ainsi on n'appliquera la méthode qu'à des formules *closes* et on n'aura pas donc à considérer d'interprétations des variables d'individu.

2.1.1 Exemples d'arbre

Pour comprendre comment cela fonctionne, le plus simple est de prendre et d'expliquer des exemples.

1. Soit la formule : $\forall x(Px \vee Qx) \Rightarrow (\forall xPx \vee \forall xQx)$ dont on veut savoir si elle valide ; ce qui revient à se demander si la négation de cette formule est satisfiable.



- Ligne a. : on commence par écrire la négation de la formule pour laquelle on fait l'arbre et on se demande à quelle condition elle est satisfiable.
- Lignes b. et c. : (1) est de la forme $\sim(\varphi \Rightarrow \psi)$ et n'est satisfiable que si φ est vrai et ψ fausse (et donc $\sim\psi$ vraie) dans un domaine et pour une interprétation des lettres de prédicats. Supposons que ce soit le cas ; on écrit l'une sous l'autre les formules (2) et (3), de sorte qu'on lit maintenant ce début de l'arbre de la manière suivante : pour que (1) soit satisfiable, il est nécessaire que (2) et (3) soient vraies dans un domaine et pour une interprétation des lettres de prédicats. Il en sera de même à chaque étape de la construction de l'arbre. Par convention, on admet que l'on écrit l'une sous l'autre les deux sous-formules et/ou négations de sous-formule qui doivent être simultanément vraies dans un domaine et pour une interprétation des lettres de prédicats, pour que la formule dont elles sont issues soit elle-même vraie dans le même domaine et pour la même interprétation des lettres de prédicats.

On continue l'arbre en se demandant à quelles conditions (2) et (3) sont vraies dans un domaine et pour une interprétation des lettres de prédicats.

(2) est de la forme $\forall x\varphi$: pour des raisons théoriques que l'on verra plus loin,

il convient de “traiter” les formules de cette forme le plus tard possible ; on s’intéresse donc à (3).

- Lignes d. et e. : (3) est de la forme $\sim(\varphi \vee \psi)$ et n’est vraie dans un domaine et pour une interprétation des lettres de prédicat que si $\sim\varphi$ et $\sim\psi$ le sont également. Comme précédemment, on écrit donc l’une sous l’autre les formules (4) et (5).

Il s’agit maintenant de savoir à quelles conditions (4) et (5) sont vraies dans un domaine et pour une interprétation des lettres de prédicats.

- Ligne f. : (4) est de la forme $\sim\forall x\varphi$ et n’est vraie dans un domaine et pour une interprétation des lettres de prédicats que s’il existe dans ce domaine un individu, disons a , tel que $\sim\varphi$ est vrai de cet individu ; on écrit donc (6).
- Ligne g. : (5) est de la même forme que (4) et n’est vraie dans un domaine et pour une interprétation des lettres de prédicats que s’il existe dans ce domaine un individu b —qui n’a aucune raison d’être le même que a tel que $\sim\varphi$ soit vrai de lui ; on écrit donc (7).

A cette étape, on voit que (3) et donc (1) n’ont de chance d’être satisfiable que si, dans un domaine D ayant au moins deux éléments, $a \notin \mathbf{P}$ et $b \notin \mathbf{Q}$.

Il reste cependant à considérer (2) qui n’a pas encore été “traitée”.

- Lignes h. et i. : (2) est de la forme $\forall x\varphi$ et n’est vraie dans un domaine et pour une interprétation des lettres de prédicats que si φ est vraie de tous les éléments de ce domaine. Ici le domaine ne comporte, pour l’instant, que deux éléments, a et b ; on écrit donc l’une sous l’autre les formules (8) et (9).

(8) est de la forme $\varphi \vee \psi$ et est vraie dans un domaine et pour une interprétation des lettres de prédicats si φ est vraie dans un domaine et pour une interprétation des lettres de prédicats ou si ψ est vraie dans un domaine et pour une interprétation des lettres de prédicats .

- Ligne j. : deux possibilités s’ouvrent donc ici pour que (8) et donc (1) soit satisfiable. On figure cela en introduisant une bifurcation et on écrit, à gauche (10) et à droite (11). Cela a comme effet de dédoubler l’arbre en deux branches, l’une comporte les formules (1)-(10) mais pas (11) et l’autre les formules (1)-(9) et (11), mais pas (10). On considère dorénavant chacune de ces branches comme

indépendante l'une de l'autre (même si plusieurs formules appartiennent aux deux branches à la fois, ici les formules de (1) à (9) inclus) et comme correspondant à deux possibilités distinctes de trouver un domaine et une interprétation des lettres de prédicat pour lesquels (1) est vrai.

Observons la branche de gauche : elle comporte les formules (10) (i.e. Pa), ligne j. et (6) (i.e. $\sim Pa$) ligne f. Il est clair qu'il n'existe pas d'interprétation des lettres de prédicat pour laquelle ces deux formules pourraient être vraies simultanément dans le petit domaine $D = \{a, b\}$. On en conclut que ce n'est pas de ce côté là que l'on pourra trouver un domaine et une interprétation des lettres de prédicat pour lesquels (1) serait vrai, ce que symbolise la croix sous (10).

- Ligne k. : reste la branche de droite. Celle-ci comporte encore une formule qui n'a pas été traitée, à savoir la formule (9) qui est, comme (8), de la forme $\varphi \vee \psi$. On introduit une nouvelle bifurcation à l'extrémité de cette branche et on écrit à gauche (12) et à droite (13).

La branche de droite qui se termine par (13) porte, comme précédemment la branche qui se terminait par (11), une formule atomique ((13) i.e. Qb) et la négation de la même formule atomique ((7), i.e. $\sim Qb$). Il n'y a donc rien à faire de ce côté-là non plus (croix sous (13)).

Reste la branche qui se termine par (12) et sur laquelle n'apparaît aucune paire de formules atomiques contradictoires, ce que symbolise la flèche verticale sous (12). Il est donc possible de définir à partir de cette branche un domaine et une interprétation des lettres de prédicat pour lesquels (1) est vrai. Pour cela il suffit de considérer les formules atomiques (ou élémentaires) et négation de formules atomiques se trouvant sur la branche, à savoir, ici : $\sim Pa$, $\sim Qb$, Pb , Qa . Il est aisé de voir que ces formules sont simultanément vraies dans un domaine $D = \{a, b\}$ pour l'interprétation suivante des lettres de prédicat :

- $\mathbf{P} = \{b\}$ puisque l'on veut que $\sim Pa$ et Pb , soient vrais dans D
- $\mathbf{Q} = \{a\}$ puisque l'on veut que Qa et $\sim Qb$, soient vrais dans D .

Vérification :

$$D \models \sim \{\forall x(Px \vee Qx) \Rightarrow (\forall xPx \vee \forall xQx)\} \text{ ssi } D \models \forall x(Px \vee Qx) \text{ et } D \models \sim$$

$(\forall xPx \vee \forall xQx)$ (clause c'')

a. $D \vDash \forall x(Px \vee Qx)$ ssi pour toute interprétation i de x , $D \vDash_i (Px \vee Qx)$ (clause d') :

- soit $i(x) = a$, alors $D \vDash_i Px \vee Qx$ ssi $D \vDash_i Px$ ou $D \vDash_i Qx$ (clause c'). Or $i(x) \in \mathbf{Q}$, donc $D \vDash_i Qx$ (clause a)) et donc $D \vDash_i Px \vee Qx$.
- soit $i(x) = b$, alors $D \vDash_i Px \vee Qx$ ssi $D \vDash_i Px$ ou $D \vDash_i Qx$ (clause c'). Or $i(x) \in \mathbf{P}$, donc $D \vDash_i Px$ (clause a)) et donc $D \vDash_i Px \vee Qx$.

Il en résulte :

$$D \vDash \forall x(Px \vee Qx) \quad (1)$$

b. $D \vDash \sim(\forall xPx \vee \forall xQx)$ ssi $D \vDash \sim\forall xPx$ et $D \vDash \sim\forall xQx$ (clause c')) :

- $D \vDash \sim\forall xPx$ ssi il existe une interprétation i de x telle que $D \not\vDash_i Px$ (clause d')) ; or $a \notin \mathbf{P}$ donc pour $i(x) = a$, $D \not\vDash_i Px$; d'où $D \vDash \sim\forall xPx$.
- $D \vDash \sim\forall xQx$ ssi il existe une interprétation i de x telle que $D \not\vDash_i Qx$ (clause d')) ; or $b \notin \mathbf{Q}$ donc pour $i(x) = b$, $D \not\vDash_i Qx$; d'où $D \vDash \sim\forall xQx$.

Il en résulte :

$$D \vDash \sim(\forall xPx \vee \forall xQx) \quad (2)$$

De (1) et de (2), il suit : $D \vDash \sim\{\forall x(Px \vee Qx) \Rightarrow (\forall xPx \vee \forall xQx)\}$.

En conséquence $\forall x(Px \vee Qx) \Rightarrow (\forall xPx \vee \forall xQx)$ n'est pas valide.

A noter : ce n'est pas seulement la formule (1) qui est vraie dans D pour l'interprétation des lettres de prédicat ci-dessus ; il est aisé de s'assurer que toutes les formules qui figurent sur la branche se terminant par la formule (12) sont également vraies dans D pour le même interprétation des lettres de prédicat. En fait la

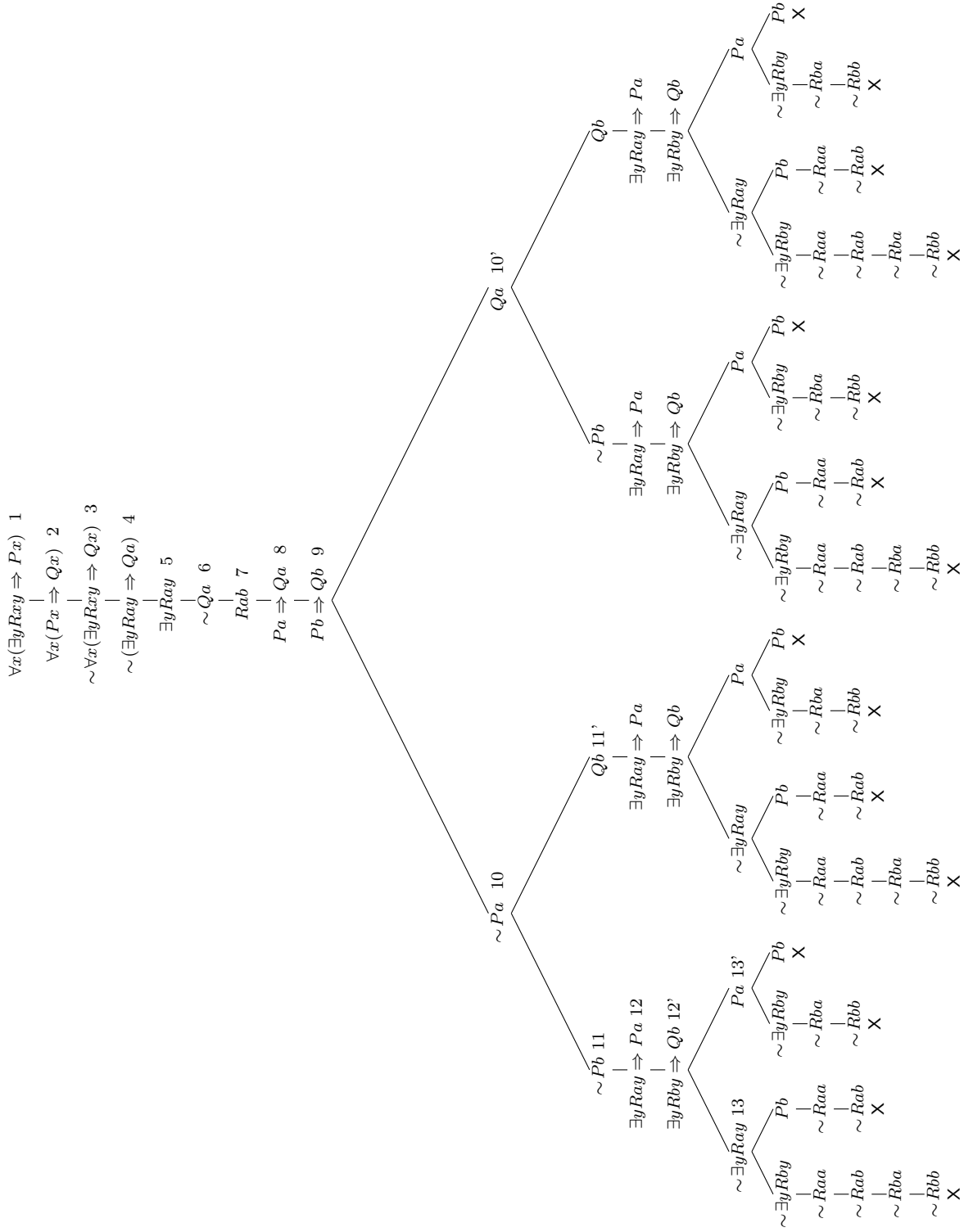
construction de cette branche revient à avoir construit un ensemble de formules de telle sorte que l'on soit assuré qu'il existe un domaine D et une D -interprétation des lettres de prédicat pour lesquels toutes les formules de cet ensemble sont vraies. On verra dans un instant qu'un ensemble comme celui-là est un ensemble de vérité descendant relativement au domaine $D = \{a, b\}$.

Remarque : on pourrait se scandaliser à bon droit de voir apparaître sur l'arbre des formules comme " $Pa \vee Qa$ " ou " Pb " qui ne sont pas construites régulièrement par application des règles de formation et n'appartiennent donc pas au langage \mathcal{L} . On va voir dans un instant comment élargir \mathcal{L} et ainsi légitimer ce genre de formule (ouf!).

2. Soit maintenant une formule plus compliquée :

$$[\forall x(\exists yRxy \Rightarrow Px) \wedge \forall x(Px \Rightarrow Qx)] \Rightarrow \forall x(\exists yRxy \Rightarrow Qx).$$

On présente d'abord l'arbre complet pour cette formule ; par manque de place, on saute les deux premières étapes, évidentes, consistant à traiter la formule initiale qui est, classiquement, une négation d'implication, puis l'antécédent de l'implication qui est une conjonction.



On remarque tout d'abord que sur toutes les branches figurent une formule élémentaire et sa négation ; donc toutes les branches sont fermées et l'arbre lui-même est fermé. La formule pour laquelle on a fait l'arbre est donc universellement valide.

On constate ensuite que cet arbre est complet, au sens où il n'y a plus de formule à traiter ; en particulier le traitement des universelles est exhaustif puisque toutes les constantes introduites ont été utilisées. Dans le cas présent, même si l'arbre est encore "à taille humaine", on voit que cela conduit à un arbre déjà passablement touffu. Dans la plupart des cas, les arbres en premier ordre sont terriblement proliférant, en raison, essentiellement du fait qu'il faut traiter autant de fois les universelles qu'il y a de constantes introduites par le biais du traitement des existentielles. Dans le cas présent, puisque deux constantes ont été introduite, cela a conduit à traiter deux fois la formule 2 ($\forall x(Px \Rightarrow Qx)$), ce qui donne quatre branches ; puis à traiter deux fois la formule 1 ($\forall x(\exists yRxy \Rightarrow Px)$) à l'extrémité de ces quatre branches, ce qui donne à chaque fois quatre nouvelles branches. Au total, donc, on obtient seize branches.

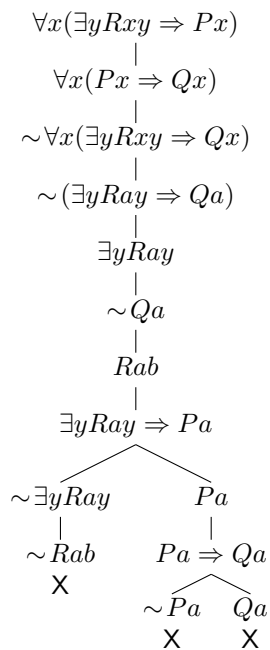
Il suffit pourtant d'examiner ce arbre pour constater que l'on peut lui faire subir un sérieux élagage. On note que dès le premier embranchement, on obtient sur la branche de droite la formule Qa , numérotée 10', qui contredit la formule 6, $\sim Qa$, qui se trouve sur le "tronc" de l'arbre. On est alors assuré que toutes les branches qui prolongeront cette branche de droite seront elles-mêmes fermées. Il est donc inutile de continuer.

Par ailleurs, l'examen des huit branches de gauche, permet de remarquer que l'on trouve sur quatre d'entre elles la formule 13, $\sim \exists yRay$, qui contredit la formule 5, $\exists yRay$; on peut donc faire l'économie des deux branches qui se situent en dessous de chacune des deux occurrences de 13. De la même manière, on trouve sur les quatre autres branches la formule 13', Pa , qui contredit la formule 10, $\sim Pa$; on peut donc là encore faire l'économie des deux branches qui se situent en dessous de chacune des deux occurrences de 13'. Si donc on procède à un tel élagage, l'arbre sera certes un peu moins équilibré, et donc moins harmonieux, mais plus rapide à construire. Voici le résultat de l'élagage :

" a " qui aime quelqu'un, disons " b ", et qui n'est pas en danger, ce qu'exprime les formules 7, Rab , et 6, $\sim Qa$.

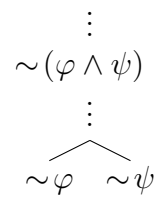
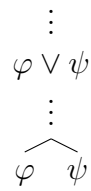
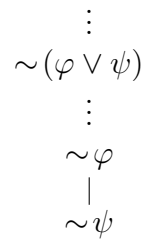
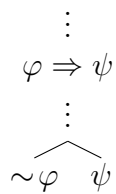
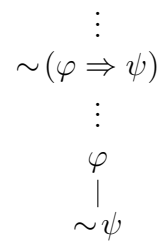
D'un autre côté, la première prémisse "dit", en particulier, que puisque a aime b , a est déraisonnable, ce qu'exprimeraient la formule, $Rab \Rightarrow Pa$. De la même manière, la deuxième prémisse "dit", en particulier, que si a est déraisonnable alors a est en danger, ce qu'exprimerait la formule $Pa \Rightarrow Qa$. Il est clair que de ces deux propositions suit que a est en danger, ce qui contredit ce qui précède.

On va donc faire l'arbre en suivant ce petit raisonnement informel, c'est à dire en traitant la première prémisse en substituant a à x et b à y et la seconde prémisse en substituant a à x , ce qui donne un arbre plutôt rabougri :



2.1.2 Règles pour la construction d'un arbre.

La démarche suivie dans les exemples précédents s'appuie sur des considérations sémantiques, puisque l'on a justifié chaque étape de la construction de l'arbre en faisant appel aux conditions de vérité des formules. On peut, comme en propositionnel, codifier de manière purement syntaxique cette démarche, c'est à dire indiquer des règles de réécriture s'appliquant à des formules d'une certaine forme. On rappelle d'abord les règles pour les connecteurs, suivies de celles qui valent pour les quantificateurs.

$\sim \wedge :$  $\wedge :$  $\vee :$  $\sim \vee :$  $\Rightarrow :$  $\sim \Rightarrow :$  $\sim \sim :$ 

$\forall^1 :$	\vdots $\forall x\varphi[x]$ \vdots $\varphi[a]$	$\sim\exists^1 :$	\vdots $\sim\exists x\varphi[x]$ \vdots $\sim\varphi[a]$
$\exists^2 :$	\vdots $\exists x\varphi[x]$ \vdots $\varphi[a]$	$\sim\forall^2 :$	\vdots $\sim\forall x\varphi[x]$ \vdots $\sim\varphi[a]$

1 : La constante a a déjà été introduite dans une formule figurant sur la branche. On recommence le traitement des universelles, \forall et $\sim\exists$, pour chaque constante précédemment introduite sur la branche.

2 : La constante a est nouvelle. Chaque traitement d'une existentielle, \exists et $\sim\forall$, entraîne l'introduction d'une, et une seule, constante nouvelle .

2.1.3 Quelques points de vocabulaire.

- la formule dont on cherche à démontrer la validité par la méthode des arbres sera dite formule *pour laquelle* un arbre est construit ; dans l'exemple précédent il s'agit donc de la formule : $\forall x(Px \vee Qx) \Rightarrow (\forall xPx \vee \forall xQx)$.
- la formule qui figure en haut d'un arbre sera dite formule *initiale* de l'arbre ; dans l'exemple précédent il s'agit donc de la formule : $\sim \{\forall x(Px \vee Qx) \Rightarrow (\forall xPx \vee \forall xQx)\}$, i.e. de la négation de la formule pour laquelle l'arbre est construit.
- une branche qui porte à la fois une formule et la négation de la même formule sera dite *fermée*.
- une branche qui n'est pas fermée sera dite *ouverte*.
- un arbre dont toutes les branches sont fermées sera dit lui-même *fermé*.
- un arbre qui n'est pas fermé sera dit *ouvert*, i.e. un arbre sera dit ouvert ssi il comporte au moins une branche ouverte.

La définition de ce qu'est un arbre *complet* est donnée plus bas (p. 40).

Attention : La construction des arbres en premier ordre est beaucoup moins "mécanique" qu'en propositionnel et demande une bonne dose de perspicacité; on trouvera dans l'appendice B (p. 77) des exemples d'arbres avec des commentaires explicatifs.

2.2 Complétude de la méthode des arbres

L'usage de la méthode des arbres, en tant que méthode de démonstration de la validité d'une formule de \mathcal{L} , devrait être le suivant : si l'arbre pour une formule φ ferme en un nombre fini d'étapes, on en conclut que φ est valide; réciproquement, si une formule φ est valide alors on s'attend à ce que l'arbre pour φ ferme en un nombre fini d'étapes.

Autrement dit, on ne veut pas qu'un arbre pour une formule φ ferme en un nombre fini d'étapes alors que φ n'est pas valide, pas plus qu'on ne veut que l'arbre pour une formule valide reste ouvert. Dans le premier cas on veut que la méthode soit correcte, dans le second on veut qu'elle soit complète.

Définitions :

- Correction de la méthode des arbres : pour toute formule φ , si l'arbre pour φ ferme en un nombre fini d'étapes, alors φ est valide.
- Complétude de la méthode des arbres : pour toute formule φ , si φ est valide alors l'arbre pour φ ferme en un nombre fini d'étapes.

Avertissement : attention à ne pas confondre la complétude de la méthode des arbres avec le fait qu'un arbre est complet; cette dernière notion (cf. plus loin) veut simplement dire que toutes les règles pour la construction d'un arbre ont été appliquées, ce qui n'a rien à voir avec la notion que l'on vient d'introduire.

On ne démontrera pas ici que la méthode des arbres est correcte; il suffit d'adapter la démonstration donnée en propositionnel.

Comme en propositionnel, on démontre que la méthode des arbres est complète en démontrant la contraposée, à savoir : si l'arbre pour φ ne ferme pas, i.e. comporte une branche ouverte, alors φ n'est pas valide. Une branche ouverte peut être considérée comme un ensemble de vérité descendant relativement à un domaine D (voir cependant la remarque importante ci-dessous). Pour définir rigoureusement cette dernière

notion, il faut modifier la définition de notre langage en introduisant des constantes d'individu; on mettra fin ainsi au scandale évoqué plus haut.

2.2.1 Langage avec constantes relativement à un domaine D

Supposons fixé un domaine $D = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ de cardinalité au plus infini dénombrable (cette dernière restriction n'est introduite ici qu'à fin de simplifier l'exposé).

On peut alors étendre notre langage \mathcal{L} en lui ajoutant un ensemble $C_D = \{c_1, \dots, c_n, \dots\}$ de constantes d'individu, étant entendu que chaque constante nomme l'élément de D qui lui correspond pour son indice. Autrement dit, c_3 nomme a_3 , c_{67} nomme a_{67} et en général c_i nomme a_i . On nommera le langage ainsi étendu, $\mathcal{L} \cup C_D$.

Une variable d'individu ou une constante d'individu, est un "terme"; on désignera dans le métalangage, un terme par la lettre " t ", éventuellement indicée.

La notion de formule bien formée est la même que pour le langage \mathcal{L} sauf en ce qui concerne la notion de "formule atomique". Il suffit donc de redéfinir la notion de formule atomique par la clause suivante :

- Une formule atomique (ou élémentaire) est une suite de la forme :

$$P_n(t_1, \dots, t_{k(n)})$$

Autrement dit, une formule atomique est constituée d'une lettre de prédicat suivie de $k(n)$ termes (variables ou constantes d'individu), $k(n)$ désignant le nombre de places de la lettre de prédicat.

Avertissement : $P_n(t_1, \dots, t_{k(n)})$ n'est pas à proprement parler une formule de $\mathcal{L} \cup C_D$, puisque " t " n'en est pas un symbole; c'est pourquoi du reste le double indigage est ici inutile.

Remarque : il peut se trouver que tous les termes dans une formule atomique soient des variables d'individu; on a alors affaire à une formule atomique telle que définie pour le langage \mathcal{L} .

Il peut se trouver également que tous les termes d'une formule atomique soient des constantes d'individu; une telle formule atomique est alors de la forme $P_n(c_{i_1}, \dots, c_{i_{k(n)}})$; ne comportant aucune variable d'individu, cette formule est donc une *formule atomique close*. On se souvient que, à l'inverse, dans \mathcal{L} toutes les formules atomiques sont ouvertes.

Définition de "être vrai pour une interprétation i des variables d'individu"

Convention : on note $\varphi[c/x]$ le résultat de la substitution de la constante c à la variable x , en toutes ses occurrences libres dans φ .

Soit $D = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$. On suppose fixée une interprétation des lettres de prédicat ; soit i une interprétation des variables d'individu.

On redéfinit alors " φ est vraie dans D pour i " ($D \models_i \varphi$) comme suit :

a_c) si φ est une formule atomique de la forme $P_n(t_1, \dots, t_{k(n)})$, $D \models_i \varphi$ ssi $\langle a_{i_1}, \dots, a_{i_{k(n)}} \rangle \in \mathbf{P}_n$, avec $a_{i_j} = i(x_{i_j})$ ($1 \leq j \leq k(n)$) si t_j est la variable d'individu x_{i_j} .

Remarque : si tous les termes qui figurent dans une formule atomique sont des variables d'individu, alors on retrouve sans changement la définition donnée pour les formules atomiques de \mathcal{L} . Si tous les termes qui figurent dans une formule atomique sont des constantes, la sous-clause de a) : "avec $a_{i_j} = i(x_{i_j})$ ($1 \leq j \leq k(n)$) si t_j est la variable d'individu x_{i_j} " n'a plus lieu d'être.

b_c), c_c), c_c'), c_c''), comme pour \mathcal{L} (cf. p. 10).

d_c) si φ est de la forme $\exists x\psi$, $D \models_i \varphi$ ssi, pour au moins une constante $c \in C_D$, $D \models_i \psi[c/x]$.

d_c') si φ est de la forme $\forall x\psi$, $D \models_i \varphi$ ssi, pour toute constante $c \in C_D$, $D \models_i \psi[c/x]$.

Remarque 1 : les clauses c_c'), c_c'') et d_c') ne sont là que pour mémoire puisque \mathcal{L} ne comporte officiellement que la négation, la conjonction et le quantificateur existentiel.

Remarque 2 : une constante est comme un nom propre du langage ordinaire ; il n'y a donc *aucun sens* à quantifier sur une constante ! Autrement dit, une "formule" comme $\forall c_i \varphi[c_i]$ ne veut rien dire du tout. . .

Remarque 3 : un langage du premier ordre avec constantes tel qu'on vient de le définir est spécifique à un domaine particulier. Si, par ex., un domaine compte n éléments, le langage $\mathcal{L} \cup C_D$ correspondant comptera n constantes, etc. La définition que l'on vient de donner est un peu restrictive, en ce que l'on admet que chaque élément

du domaine est "nommé" par une et une seule constante du langage correspondant ; dans le langage ordinaire, beaucoup de chose n'ont pas de nom, et une même chose peut avoir plusieurs noms. Il s'agit donc d'une idéalisation commode...

Notons également que toutes les formules, ouvertes ou closes, de \mathcal{L} sont des formules d'un langage $\mathcal{L} \cup C_D$. On peut donc exprimer dans un langage $\mathcal{L} \cup C_D$ toutes les lois logiques habituelles.

2.2.2 Ensemble de vérité descendant, ensemble de vérité, relativement à un domaine D

Définition : un ensemble de vérité descendant relativement à un domaine D (que l'on nommera W_D) est un ensemble de formules closes de $\mathcal{L} \cup C_D$ remplissant les conditions suivantes :

1. quelle que soit φ , on ne peut avoir simultanément $\varphi \in W_D$ et $\sim \varphi \in W_D$ (remarque : on pourrait se contenter de formuler cette clause pour les formules atomiques closes).
2. si φ est une formule de la forme $\sim \sim \psi$ et si $\varphi \in W_D$ alors $\psi \in W_D$.
3. si φ est une formule de la forme $\psi \wedge \theta$ et si $\varphi \in W_D$ alors $\psi \in W_D$ et $\theta \in W_D$.
4. si φ est une formule de la forme $\sim (\psi \wedge \theta)$ et si $\varphi \in W_D$ alors $\sim \psi \in W_D$ ou $\sim \theta \in W_D$.
5. si φ est de la forme $\exists x \psi$ et si $\varphi \in W_D$ alors, pour au moins une constante $c \in C_D$, $\psi[c/x] \in W_D$.
6. si φ est de la forme $\sim \exists x \psi$ et si $\varphi \in W_D$ alors, pour toute constante $c \in C_D$, $\sim \psi[c/x] \in W_D$.

On voit que les clauses 2-6 ci-dessus correspondent très exactement aux règles pour la construction d'un arbre (les règles pour la disjonction, négation de disjonction, implication, négation d'implication, universelle et négation d'universelle se déduisent aisément des règles 3-6, moyennant les définitions classiques de ces connecteurs au moyen de la négation et de la conjonction et du quantificateur universel au moyen de la négation et de l'existentiel) ; il s'ensuit que l'ensemble des formules qui apparaissent sur une branche ouverte, puisqu'il satisfait également la clause 1, est un ensemble de vérité descendant relativement au domaine D constitué des constantes introduites au cours de la construction de la branche. On admettra en ce cas que ces

constantes se nomment elles-mêmes.

Remarque importante : L'application aveugle des règles pour la construction d'un arbre ne conduit pas nécessairement à ce qu'une branche ouverte soit un ensemble de vérité descendant.

Par exemple : supposons que sur une branche apparaisse, entre autres formules encore à traiter, une formule de la forme $\forall x, \exists y \varphi$. Le traitement exclusif "en boucle" de cette formule conduirait à poursuivre indéfiniment la construction de la branche en négligeant d'autres formules de type conjonction, disjonction ou existentiel. On aurait alors une branche infinie ouverte qui ne constituerait pas un ensemble de vérité descendant puisqu'il pourrait y avoir sur cette branche une formule de la forme, par ex., $\psi \wedge \theta$, sans qu'il y ait ni ψ ni θ .

Une branche ouverte n'est donc un ensemble de vérité descendant que si l'arbre a été systématiquement construit, c'est à dire si l'on a traité systématiquement les universelles en dernier, après 1. les connecteurs et 2. les existentielles (dans cet ordre). On admettra qu'un arbre est *complet* si toutes les formules de type conjonction, disjonction ou existentiel ont été traitées et si toutes les constantes introduites ont été utilisées dans le traitement des universelles.

Notons que cela assure, certes, qu'une branche ouverte est bien un ensemble de vérité descendant, mais cela n'est nullement une procédure rapide et efficace ! Si l'on utilise pratiquement la méthode des arbres pour établir qu'une formule est valide, il convient de faire preuve de sagacité dans la recherche de la manière la plus rapide de fermer (éventuellement) l'arbre. A cette fin, il convient de choisir soigneusement les constantes (déjà introduites sur la branche) à utiliser pour le traitement des universelles afin de pouvoir fermer l'arbre (s'il doit fermer) sans avoir besoin d'utiliser, dans le traitement des universelles, toutes les constantes introduites. On évitera ainsi une prolifération tropicale, sinon même équatoriale, de l'arbre. On trouvera dans l'appendice B (p. 77) des exemples d'arbre avec les commentaires appropriés

Théorème sur les ensembles de vérité descendants relativement à un domaine D

Soit W_D un ensemble de vérité descendant relativement au domaine D .

A démontrer : il existe une D -interprétation des lettres de prédicat telle que, pour toute formule close φ , si $\varphi \in W_D$ alors $D \models \varphi$.

Soit l'interprétation suivante des lettres de prédicats :

- Si $P_n(c_{i_1}, \dots, c_{i_{k(n)}}) \in W_D$ alors $\langle a_{i_1}, \dots, a_{i_{k(n)}} \rangle \in \mathbf{P}_n$,
- Si $\sim P_n(c_{i_1}, \dots, c_{i_{k(n)}}) \in W_D$ alors $\langle a_{i_1}, \dots, a_{i_{k(n)}} \rangle \notin \mathbf{P}_n$,
- Si ni $P_n(c_{i_1}, \dots, c_{i_{k(n)}}) \in W_D$ ni $\sim P_n(c_{i_1}, \dots, c_{i_{k(n)}}) \in W_D$, alors, au choix, $\langle a_{i_1}, \dots, a_{i_{k(n)}} \rangle \in \mathbf{P}_n$ ou (exclusif!) $\langle a_{i_1}, \dots, a_{i_{k(n)}} \rangle \notin \mathbf{P}_n$.

On est assuré que cette interprétation est possible puisque, par définition de W_D , on ne peut avoir simultanément $P_n(c_{i_1}, \dots, c_{i_{k(n)}}) \in W_D$ et $\sim P_n(c_{i_1}, \dots, c_{i_{k(n)}}) \in W_D$.

On démontre que pour cette interprétation des lettres de prédicat, et pour toute formule close φ de $\mathcal{L} \cup C_D$, si $\varphi \in W_D$ alors $D \models \varphi$.

Par récurrence sur le degré des formules.

1. Soit φ de degré 0, i.e. φ est de la forme $P_n(c_{i_1}, \dots, c_{i_{k(n)}})$.

Immédiat au vu de la définition de l'interprétation des lettres de prédicat : si $P_n(c_{i_1}, \dots, c_{i_{k(n)}}) \in W_D$ alors $\langle a_{i_1}, \dots, a_{i_{k(n)}} \rangle \in \mathbf{P}_n$ (par déf. de \mathbf{P}_n) et donc $D \models P_n(c_{i_1}, \dots, c_{i_{k(n)}})$, en vertu de la clause a_c p. 38 (idem pour φ de degré 1 de la forme $\sim P_n(c_{i_1}, \dots, c_{i_{k(n)}})$).

Hypothèse de récurrence : pour toute formule close φ de degré strictement inférieur à n , si $\varphi \in W_D$ alors $D \models \varphi$.

2. Soit φ de degré n .

- φ de la forme $\sim \sim \psi$: si $\sim \sim \psi \in W_D$ alors $\psi \in W_D$ (par déf. de W_D) et donc $D \models \psi$ (par hyp. de rec.); d'où $D \not\models \sim \psi$ et donc $D \models \sim \sim \psi$ (par la clause b), p. 10).
- φ de la forme $\psi \wedge \theta$: si $\psi \wedge \theta \in W_D$ alors $\psi \in W_D$ et $\theta \in W_D$ (par déf. de W_D) et donc $D \models \psi$ et $D \models \theta$ (par hyp. de rec.); d'où $D \models \psi \wedge \theta$ (par la clause c), p. 10).
- φ de la forme $\sim(\psi \wedge \theta)$: si $\sim(\psi \wedge \theta) \in W_D$ alors $\sim \psi \in W_D$ ou $\sim \theta \in W_D$ (par déf. de W_D) et donc $D \models \sim \psi$ ou $D \models \sim \theta$ (par hyp. de rec.), i.e. $D \not\models \psi$ ou $D \not\models \theta$; d'où $D \models \sim(\psi \wedge \theta)$ (par les clauses b), c), p. 10).

- φ est de la forme $\exists x\psi$: si $\exists x\psi \in W_D$ alors, pour au moins une constante $c \in C_D$, $\psi[c/x] \in W_D$ (déf. de W_D), d'où, pour au moins une constante $c \in C_D$, $D \models \psi[c/x]$ (hyp. de rec.) et donc $D \models \exists x\psi$ (par la clause d_c) p. 38).
- φ est de la forme $\sim\exists x\psi$: si $\sim\exists x\psi \in W_D$ alors, pour toute constante $c \in C_D$, $\sim\psi[c/x] \in W_D$ (déf. de W_D), d'où, pour toute constante $c \in C_D$, $D \models \sim\psi[c/x]$ (hyp. de rec.), autrement dit, il n'existe pas de constante $c \in C_D$ telle que $D \models \psi[c/x]$, et donc $D \models \sim\exists x\psi$ (par la clause d_c) p. 38).

Remarque : comme en propositionnel, on peut être un peu surpris par le traitement de la négation, aussi bien dans la définition de W_D que dans la démonstration ci-dessus, puisqu'au lieu de faire la démonstration pour une formule quelconque de la forme $\sim\psi$, on traite les formules de la forme $\sim\sim\psi$, $\sim(\psi \wedge \theta)$ et $\sim\exists x\varphi$. Cela n'affaiblit en rien la démonstration puisque, en vertu de la définition de notre langage, toutes les formules closes sont de l'une des sept formes suivantes : $P_n(c_{i_1}, \dots, c_{i_{k(n)}})$, $\sim P_n(c_{i_1}, \dots, c_{i_{k(n)}})$, $\sim\sim\psi$, $\psi \wedge \theta$, $\sim(\psi \wedge \theta)$, $\exists x\varphi$ ou $\sim\exists x\varphi$. Nous sommes tenus de procéder ainsi car même si la clause 1. pour W_D , nous permet de savoir que si $\sim\psi$ appartient à W_D , ψ n'y appartient pas, l'hypothèse de récurrence ne concernant que les formules qui appartiennent à W_D , ne nous permet pas, en ce cas, de déterminer la valeur de vérité de ψ dans D ; c'est pourquoi dans la démonstration pour les formules de degré $= n$, nous ne pouvons prendre en considération que les formules de degré strictement inférieur à n qui appartiennent à W_D .

Cela suggère une autre démonstration, indirecte, mais plus simple (cf. ce qui a été fait en propositionnel).

Ensembles de vérité relativement à un domaine D

Dans les mêmes conditions que ci-dessus, on définit un ensemble de vérité relativement à un domaine $D = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$.

Un ensemble de vérité relativement à un domaine D (que l'on nommera \mathcal{W}_D) est un ensemble de formules closes de $\mathcal{L} \cup C_D$ remplissant les conditions suivantes :

1. Pour toute formule φ , $\varphi \in \mathcal{W}_D$ ssi $\sim\varphi \notin \mathcal{W}_D$.

2. si φ est une formule de la forme $\psi \wedge \theta$, $\varphi \in \mathcal{W}_D$ ssi $\psi \in \mathcal{W}_D$ et $\theta \in \mathcal{W}_D$.
3. si φ est de la forme $\exists x\psi[x]$, $\varphi \in \mathcal{W}_D$ ssi, pour au moins une constante $c \in C_D$, $\psi[c/x] \in \mathcal{W}_D$

A démontrer : il existe une interprétation des lettres de prédicat telle que, pour toute formule close φ , $\varphi \in \mathcal{W}_D$ ssi $D \models \varphi$.

Soit l'interprétation suivante des lettres de prédicat :

$\langle a_{i_1}, \dots, a_{i_{k(n)}} \rangle \in \mathbf{P}_n$ ssi $P_n(c_{i_1}, \dots, c_{i_{k(n)}}) \in \mathcal{W}_D$.

On est assuré que cette interprétation est possible puisque, par définition de \mathcal{W}_D (clause 1.) on ne peut avoir simultanément $P_n(c_{i_1}, \dots, c_{i_{k(n)}}) \in \mathcal{W}_D$ et $\sim P_n(c_{i_1}, \dots, c_{i_{k(n)}}) \in \mathcal{W}_D$.

On va donc démontrer que pour cette interprétation, et pour toute formule close φ de $\mathcal{L} \cup C_D$, $\varphi \in \mathcal{W}_D$ ssi $D \models \varphi$.

1. φ de degré 0 et de la forme $P_n(c_{i_1}, \dots, c_{i_{k(n)}})$: $P_n(c_{i_1}, \dots, c_{i_{k(n)}}) \in \mathcal{W}_D$ ssi $\langle a_{i_1}, \dots, a_{i_{k(n)}} \rangle \in \mathbf{P}_n$ (par déf. de l'interprétation) ssi $D \models P_n(c_{i_1}, \dots, c_{i_{k(n)}})$ (clause a_c), p. 38).
2. Hyp. de récurrence : si φ est de degré strictement inférieur à n , $\varphi \in \mathcal{W}_D$ ssi $D \models \varphi$. (d'où par contraposition : $\varphi \notin \mathcal{W}_D$ ssi $D \not\models \varphi$).
3. φ de degré n
 - a. φ de la forme $\sim\psi$: $\varphi \in \mathcal{W}_D$ ssi $\sim\psi \in \mathcal{W}_D$ ssi $\psi \notin \mathcal{W}_D$ (par déf. de \mathcal{W}_D) ssi $D \not\models \psi$ (par l'hyp. de réc.) ssi $D \models \sim\psi$ (clause b), p. 10).
 - b. φ de la forme $\psi \wedge \theta$: $\varphi \in \mathcal{W}_D$ ssi $\psi \wedge \theta \in \mathcal{W}_D$ ssi $\psi \in \mathcal{W}_D$ et $\theta \in \mathcal{W}_D$ (par déf. de \mathcal{W}_D) ssi $D \models \psi$ et $D \models \theta$ (par l'hyp. de réc.) ssi $D \models \psi \wedge \theta$ (clause c), p. 10).
 - c. φ de la forme $\exists x\psi$: $\varphi \in \mathcal{W}_D$ ssi $\exists x\psi \in \mathcal{W}_D$ ssi, pour au moins une constante $c \in C_D$, $\psi[c/x] \in \mathcal{W}_D$ (par déf. de \mathcal{W}_D), ssi, pour au moins une constante $c \in C_D$, $D \models \psi[c/x]$ (par l'hyp. de récurrence) ssi $D \models \exists x\psi$ (clause d_c), p. 38).

On voit que l'on affaire ici qu'à des "ssi" et cela permet de savoir ce qu'il en est de la vérité ou de la fausseté des formules n'appartenant pas à \mathcal{W}_D : l'hypothèse de récurrence pose que, si une formule φ (de degré strictement inférieur à n) n'appartient pas à \mathcal{W}_D , alors elle est fausse pour l'interprétation des lettres de prédicat définie ci-dessus et, en vertu de la clause 1. pour \mathcal{W}_D , on sait que sa négation appartient à \mathcal{W}_D .

D'un autre côté, il découle des clauses pour \mathcal{W}_D que :

- si $\sim\sim\psi \in \mathcal{W}_D$ alors $\psi \in \mathcal{W}_D$: en effet, en vertu de la clause 1. pour \mathcal{W}_D (deux fois), $\sim\sim\psi \in \mathcal{W}_D$ ssi $\sim\psi \notin \mathcal{W}_D$ ssi $\psi \in \mathcal{W}_D$.
- si $\sim(\psi \wedge \theta) \in \mathcal{W}_D$ alors $\sim\psi \in \mathcal{W}_D$ ou $\sim\theta \in \mathcal{W}_D$: en effet, en vertu des clauses 1., 2. (par contraposition), puis encore 1. pour \mathcal{W}_D , $\sim(\psi \wedge \theta) \in \mathcal{W}_D$ ssi $\psi \wedge \theta \notin \mathcal{W}_D$ ssi $\psi \notin \mathcal{W}_D$ ou $\theta \notin \mathcal{W}_D$ ssi $\sim\psi \in \mathcal{W}_D$ ou $\sim\theta \in \mathcal{W}_D$.
- si $\sim\exists x\psi \in \mathcal{W}_D$, alors, pour toute constante $c \in C_D$, $\sim\psi[c/x] \in \mathcal{W}_D$: en effet, en vertu des clauses 1., 3. (par contraposition), puis encore 1. pour \mathcal{W}_D , $\sim\exists x\psi \in \mathcal{W}_D$ ssi $\exists x\psi \notin \mathcal{W}_D$ ssi, pour toute constante $c \in C_D$, $\psi[c/x] \notin \mathcal{W}_D$ ssi, pour toute constante $c \in C_D$, $\sim\psi[c/x] \in \mathcal{W}_D$.

Il en résulte qu'un ensemble de vérité descendant relativement à un domaine D est un sous-ensemble d'un ensemble de vérité relativement au même domaine D . En montrant qu'il existe une interprétation des lettres de prédicat pour laquelle toutes les formules d'un ensemble de vérité \mathcal{W}_D sont vraies dans D , on montre *a fortiori* que cela vaut des formules d'un sous-ensemble de \mathcal{W}_D .

Plus généralement, étant donné un domaine D , on admettra que si un ensemble de formules de $\mathcal{L} \cup C_D$ est satisfiable dans D , il peut être étendu à un ensemble de vérité relativement à D . Il en résulte, comme en propositionnel, qu'un ensemble de vérité descendant relativement à un domaine D peut être étendu à un ensemble de vérité relativement au même domaine.

Achèvement de la démonstration de complétude.

Une branche ouverte d'un arbre construit systématiquement est un ensemble de vérité descendant. D'après ce qui précède, toutes les formules d'une branche ouverte sont simultanément satisfiables. Si donc l'arbre pour une formule φ comporte une

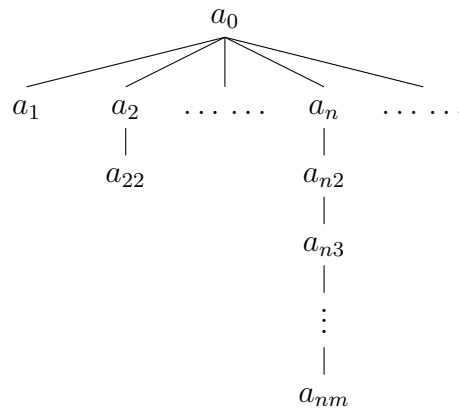
branche ouverte, la formule initiale de l'arbre, i.e. $\sim\varphi$, appartenant à cette branche ouverte, est satisfiable ; il s'ensuit que φ n'est pas valide. Par contraposition, si φ est valide alors l'arbre pour φ ferme (i.e. ne comporte pas de branche ouverte), CQFD.

Il reste à montrer que l'arbre pour une formule valide ferme en un nombre *fini* d'étapes.

Pour cela, on a besoin d'un lemme (assez intuitif), connu sous le nom de "lemme de König" qui établit qu'un arbre "finitaire" infini (i.e. ayant un nombre infini de points) a au moins une branche infinie.

Par arbre "finitaire", on entend un arbre tel qu'un point quelconque de l'arbre n'a qu'un nombre fini de successeurs immédiats. Dans le cas de la "méthode des arbres" telle qu'elle est présentée ici, on voit que chaque point n'a au plus que deux successeurs immédiats.

On voit aisément que si un arbre a un point ayant un nombre infini de successeurs immédiats, il aura un nombre infini de points même si chaque branche n'en a qu'un nombre fini et qu'il n'y a pas de branche de longueur maximale, comme dans l'exemple ci-dessous :



A l'inverse, le lemme de König assure que si aucun point d'un arbre n'a un nombre infini de successeurs immédiats (si l'arbre est finitaire), alors, si l'arbre est infini, c'est qu'il comporte au moins une branche infinie.

Démonstration : Soit un arbre finitaire infini \mathcal{A} . Appelons "descendants" d'un point a , les points qui figurent sur les branches passant par a et situés en dessous de a . Un point est dit "prodigue" s'il a un nombre infini de descendants et "avare" s'il en a un nombre fini. Comme \mathcal{A} est infini, le point origine de \mathcal{A} , a_0 , est nécessairement prodigue.

Maintenant, un point n'ayant qu'un nombre fini de successeurs immédiats, peut-il être prodigue et n'avoir que des successeurs immédiats avares? Clairement non, car en ce cas, il serait lui-même avare. Donc a_0 a au moins un successeur immédiat prodigue, disons a_1 , qui lui-même a au moins un successeur immédiat prodigue, a_2 , qui lui-même, etc. On est donc assuré que \mathcal{A} comporte au moins une branche infinie passant par les points $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \dots$.

On a donc montré que si un arbre finitaire est infini, il comporte au moins une branche infinie; de là, par contraposition, si toutes les branches d'un arbre finitaire sont finies, alors l'arbre lui-même est fini. Cqfd.

L'application se fait alors aisément à la méthode des arbres : une branche fermée est nécessairement finie et donc si toutes les branches d'un arbre sont fermées (et donc finies) - autrement dit, si l'arbre ferme - l'arbre est fini.

2.2.3 Problème de la décision

On vient de prouver que *si une formule φ est valide, alors l'arbre pour φ ferme en un nombre fini d'étapes*. En résulte-t-il qu'étant donné *une formule quelconque*, nous obtiendrons en un nombre fini d'étapes une réponse, par oui ou par non, à la question de savoir si elle est valide? Cette question revient à se demander si la méthode des arbres est une procédure de décision pour la validité.

Soit une formule φ quelconque. Si elle est valide (ce que nous ne savons pas au départ), nous aurons une réponse par oui en un nombre fini d'étapes; par contre, si elle n'est pas valide (ce que nous savons pas non plus au départ), la situation est plus délicate : si $\sim\varphi$ est *fini-satisfiable*, nous aurons une réponse par non, en un nombre fini d'étapes; mais il peut se trouver que $\sim\varphi$ soit certes satisfiable mais pas fini-satisfiable auquel cas la construction de l'arbre pour φ ne se terminera jamais et nous n'aurons pas de réponse à la question de savoir si φ est valide. Autrement dit, si la négation d'une formule φ n'est pas fini-satisfiable, alors nous n'obtiendrons aucune réponse en un nombre fini d'étapes à la question de savoir si φ est valide ou non.

L'exemple classique d'une formule qui n'est pas fini-satisfiable est la conjonction suivante :

$$\mathfrak{F} : \forall x, \exists y, Rxy \wedge \forall x \sim Rxx \wedge \forall x, \forall y, \forall z [(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz]$$

Cette formule ne peut être vraie dans un domaine que si R est interprétée par une relation *sérielle* (premier membre de la conjonction), *irreflexive* (deuxième membre)

et *transitive* (troisième membre). Il est facile de voir que cette formule est vraie dans le domaine des entiers naturels, en interprétant R par " $<$ ".

Il est également aisé de voir qu'elle ne peut être vraie dans aucun domaine fini non vide.

Supposons en effet qu'il y ait au moins un élément a . Alors en vertu de la sérialité, il doit y avoir également un élément b avec lequel a entretient la relation \mathbf{R} ; cet élément ne peut être a lui-même en vertu de l'irréflexivité. b est donc un nouvel élément.

En vertu de la sérialité, b doit lui-même entretenir la relation \mathbf{R} avec un élément c qui ne peut ni être b lui-même (en vertu de l'irréflexivité), ni a : en effet, si on avait $\langle b, a \rangle \in \mathbf{R}$ alors, puisque $\langle a, b \rangle \in \mathbf{R}$, on aurait, par transitivité, $\langle a, a \rangle \in \mathbf{R}$ et $\langle b, b \rangle \in \mathbf{R}$, ce qui contredirait l'irréflexivité de \mathbf{R} . Il faut donc introduire un nouvel élément c , tel que $\langle b, c \rangle \in \mathbf{R}$.

Mais là encore, en vertu de la sérialité, c doit entretenir la relation \mathbf{R} avec un élément d qui ne peut ni être c lui-même (en vertu de l'irréflexivité), ni b , ni a : en effet :

- si on avait $\langle c, b \rangle \in \mathbf{R}$, alors, puisque $\langle b, c \rangle \in \mathbf{R}$, on aurait, par transitivité, $\langle b, b \rangle \in \mathbf{R}$ et $\langle c, c \rangle \in \mathbf{R}$, ce qui contredirait l'irréflexivité de \mathbf{R} .

- si on avait $\langle c, a \rangle \in \mathbf{R}$, alors, puisque $\langle a, b \rangle \in \mathbf{R}$, on aurait, par transitivité, $\langle c, b \rangle \in \mathbf{R}$, ce qui reviendrait au cas précédent

Il faut donc introduire un nouvel élément d , tel que $\langle c, d \rangle \in \mathbf{R}$. etc.

On voit facilement que le même raisonnement se répètera indéfiniment, en se compliquant à chaque fois un peu plus¹.

Supposons alors que l'on cherche à savoir si la négation de cette formule, à savoir $\sim\varphi$, est valide. L'arbre pour $\sim\varphi$ aura donc pour formule initiale $\sim\sim\varphi$, c'est dire φ ; comme on vient de le voir, l'arbre ayant φ comme formule initiale ne fermera jamais et l'on ne pourra rien en conclure (ce qui ne veut pas dire que nous ne sachions pas, *par ailleurs*, que φ est satisfiable dans un domaine infini dénombrable mais ce n'est pas la méthode des arbres qui l'établit). C'est pourquoi la méthode des arbres n'est pas une procédure de décision pour la validité, même si elle est une méthode de démonstration complète.

1. D'autres formules infini satisfiables sont examinées dans l'appendice C

2.3 Calcul des séquents en premier ordre

Comme en propositionnel, on peut utiliser la méthode des arbres pour trouver une preuve d'une formule valide dans le calcul des séquents. En premier ordre, il faut ajouter aux règles d'introduction des connecteurs à droite ou à gauche de la flèche des séquents, des règles d'introduction pour les quantificateurs.

Auparavant, on ré-expose rapidement, dans les termes de la logique du premier ordre, ce que représente un séquent dans ce nouveau cadre. Un séquent est de la forme $\Phi \rightarrow \Psi$, Φ et Ψ représentant des ensembles de formules *closes*. On admet donc dans ce qui suit que le langage \mathcal{L} comporte un ensemble de constantes C , qui ne "nomment" encore rien mais qui sont destinées à nommer les éléments de domaines quelconques. Lorsque l'on considère un domaine D donné, il faut donc préciser quel élément de ce domaine nomment les constantes de \mathcal{L} . On précise cela par le biais d'une fonction $\iota : C \rightarrow D$. La différence entre ces "constantes" et les variables d'individu habituelles est que l'on ne peut quantifier sur les constantes, autrement dit une formule comme $\exists c(Pc \wedge \forall xQx)$ n'a *aucun sens*². Comme on l'a vu précédemment, une formule atomique peut être close lorsqu'à la suite d'une lettre de prédicat P_n ne se trouvent que $k(n)$ constantes. Comme l'on ne considère ici que des formules closes, on n'aura donc affaire qu'à des formules atomiques de ce genre.

2.3.1 Règles d'inférence nouvelles

Cela étant, on peut dire qu'un séquent est valide ssi l'implication dont l'antécédent est la conjonction des formules (closes) appartenant à Φ et le conséquent, la disjonction des formules (closes) appartenant à Ψ , est elle-même valide.

Cela signifie maintenant que, quel que soit le domaine D , la D -interprétation des lettres de prédicat et la fonction $\iota : C \rightarrow D$, si toutes les formules appartenant à Φ sont vraies dans D pour ι , alors au moins une formule appartenant à Ψ est vraie dans D pour ι .

- Considérons maintenant un séquent de la forme $\Phi \rightarrow \Psi, \varphi[c]$ et supposons-le valide. On montre, par contraposition, qu'alors le séquent $\Phi \rightarrow \Psi, \exists x\varphi[x]$ est

2. En pratique, on admettra que la fonction ι est implicitement donnée et l'on utilisera les petites lettres a, b, c , etc. en tant que nom des éléments a, b, c , etc. d'un domaine D , comme on le fait lorsque l'on construit un arbre. Plus généralement, étant donné un domaine D et une fonction ι donnée, on admettra que $\iota(c)$ est le nom de l'élément $\iota(c)$ du domaine D . c est une constante quelconque de C .

lui-même valide (rappel : $\varphi[x]$ est la formule obtenue en substituant la variable x à la constante c en toutes ses occurrences dans φ).

Supposons que $\Phi \rightarrow \Psi, \exists x\varphi[x]$ ne soit pas valide. Alors il existe un domaine D , une interprétation des lettres de prédicat et une interprétation ι des constantes tels que toutes les formules appartenant à Φ sont vraies dans D pour ι et toutes les formules appartenant à $\Psi \cup \{\exists x\varphi[x]\}$ sont fausses dans D pour ι . Donc en particulier, $\exists x\varphi[x]$ est faux dans D pour ι , ce qui signifie qu'il n'existe pas d'élément $a \in D$ tel que l'on pourrait avoir, pour la constante c figurant dans $\varphi[c]$, $\iota(c) = a$ et $\varphi[\iota(c)]$ vrai dans D . Donc $\varphi[c]$ est faux dans D pour ι et comme toutes les formules appartenant à Ψ sont également fausses dans D pour ι , toutes les formules appartenant à $\Psi \cup \{\varphi[c]\}$ sont fausses dans D pour ι . Comme par hypothèse, toutes les formules appartenant à Φ sont vraies dans D pour ι , le séquent $\Phi \rightarrow \Psi, \varphi[c]$ n'est pas valide. En contraposant, on a donc : si $\Phi \rightarrow \Psi, \varphi[c]$ est valide alors $\Phi \rightarrow \Psi, \exists x\varphi[x]$ est valide.

On a donc la règle d'inférence suivante :

$$\frac{\Phi \rightarrow \Psi, \varphi[c]}{\Phi \rightarrow \Psi, \exists x\varphi[x]}$$

- De la même manière, supposons que le séquent $\Phi, \varphi[c] \rightarrow \Psi$ soit valide. On montre qu'alors le séquent $\Phi, \exists x\varphi[x] \rightarrow \Psi$ est valide, à condition que c n'apparaisse pas dans ce dernier séquent. Il est facile de voir que lorsque toutes les formules appartenant à $\Phi \cup \{\varphi[c]\}$ sont vraies dans un domaine, pour une interprétation etc. c'est qu'il existe dans la domaine en question un élément ("nommé" par c) qui rend vraie la formule φ et donc $\exists x\varphi[x]$ est également vrai dans le même domaine, etc.

Le point sensible est ce qui est en italique ci-dessus : pourquoi faut-il que c n'apparaisse pas dans $\Phi, \exists x\varphi[x] \rightarrow \Psi$, c'est à dire dans aucune des formules appartenant à Φ ou à Ψ ? C'est, par ex., qu'il serait alors possible qu'appartienne à Φ la formule $\sim\varphi[c]$; le séquent $\Phi, \varphi[c] \rightarrow \Psi$ serait alors parfaitement valide (même si c'est pour la mauvaise raison (!) que son antécédent est contradictoire et donc non satisfiable). Par contre, rien n'exclut que $\Phi, \exists x\varphi[x]$ soit satisfiable dans des circonstances³ dans lesquelles Ψ ne le serait pas; il en résulterait que le séquent $\Phi, \exists x\varphi[x] \rightarrow \Psi$ ne serait pas valide.

3. Il se pourrait, en effet, qu'il existe un domaine D , et une D -interprétation des lettres de prédicat tels que $\varphi[c]$ soit faux pour $\iota(c)$ (et donc $\sim\varphi[c]$ vrai pour $\iota(c)$) mais qu'il existe un autre élément de D qui rende vrai φ et donc qui rende vrai $\exists x\varphi[x]$.

On a donc une nouvelle règle d'inférence :

$$\frac{\Phi, \varphi[c] \rightarrow \Psi}{\Phi, \exists x\varphi[x] \rightarrow \Psi}$$

Pourvu que c ne figure pas dans la conclusion

Des raisonnements similaires permettent de justifier les deux autres règles d'inférence suivantes :

$$\frac{\Phi, \varphi[c] \rightarrow \Psi}{\Phi, \forall x\varphi[x] \rightarrow \Psi}$$

$$\frac{\Phi \rightarrow \Psi, \varphi[c]}{\Phi \rightarrow \Psi, \forall x\varphi[x]}$$

Pourvu que c ne figure pas dans la conclusion

On récapitule ci-dessous les règles d'introduction à droite et à gauche pour les connecteurs et les quantificateurs :

TABLE DES RÈGLES POUR LE CALCUL DES SÉQUENTS		
	Introduction à gauche	Introduction à droite
\wedge	$\frac{\Phi, \theta, \lambda \rightarrow \Psi}{\Phi, \theta \wedge \lambda \rightarrow \Psi}$	$\frac{\Phi \rightarrow \Psi, \theta \quad \Phi \rightarrow \Psi, \lambda}{\Phi \rightarrow \Psi, \theta \wedge \lambda}$
\vee	$\frac{\Phi, \theta \rightarrow \Psi \quad \Phi, \lambda \rightarrow \Psi}{\Phi, \theta \vee \lambda \rightarrow \Psi}$	$\frac{\Phi \rightarrow \Psi, \theta, \lambda}{\Phi \rightarrow \Psi, \theta \vee \lambda}$
\Rightarrow	$\frac{\Phi \rightarrow \Psi, \theta \quad \Phi, \lambda \rightarrow \Psi}{\Phi, \theta \Rightarrow \lambda \rightarrow \Psi}$	$\frac{\Phi, \theta \rightarrow \Psi, \lambda}{\Phi \rightarrow \Psi, \theta \Rightarrow \lambda}$
\sim	$\frac{\Phi \rightarrow \Psi, \theta}{\Phi, \sim\theta \rightarrow \Psi}$	$\frac{\Phi, \theta \rightarrow \Psi}{\Phi \rightarrow \Psi, \sim\theta}$
\exists	$\frac{\Phi, \varphi[c] \rightarrow \Psi}{\Phi, \exists x\varphi[x] \rightarrow \Psi}$ Pourvu que c ne figure pas dans la conclusion	$\frac{\Phi \rightarrow \Psi, \varphi[c]}{\Phi \rightarrow \Psi, \exists x\varphi[x]}$
\forall	$\frac{\Phi, \varphi[c] \rightarrow \Psi}{\Phi, \forall x\varphi[x] \rightarrow \Psi}$	$\frac{\Phi \rightarrow \Psi, \varphi[c]}{\Phi \rightarrow \Psi, \forall x\varphi[x]}$ Pourvu que c ne figure pas dans la conclusion

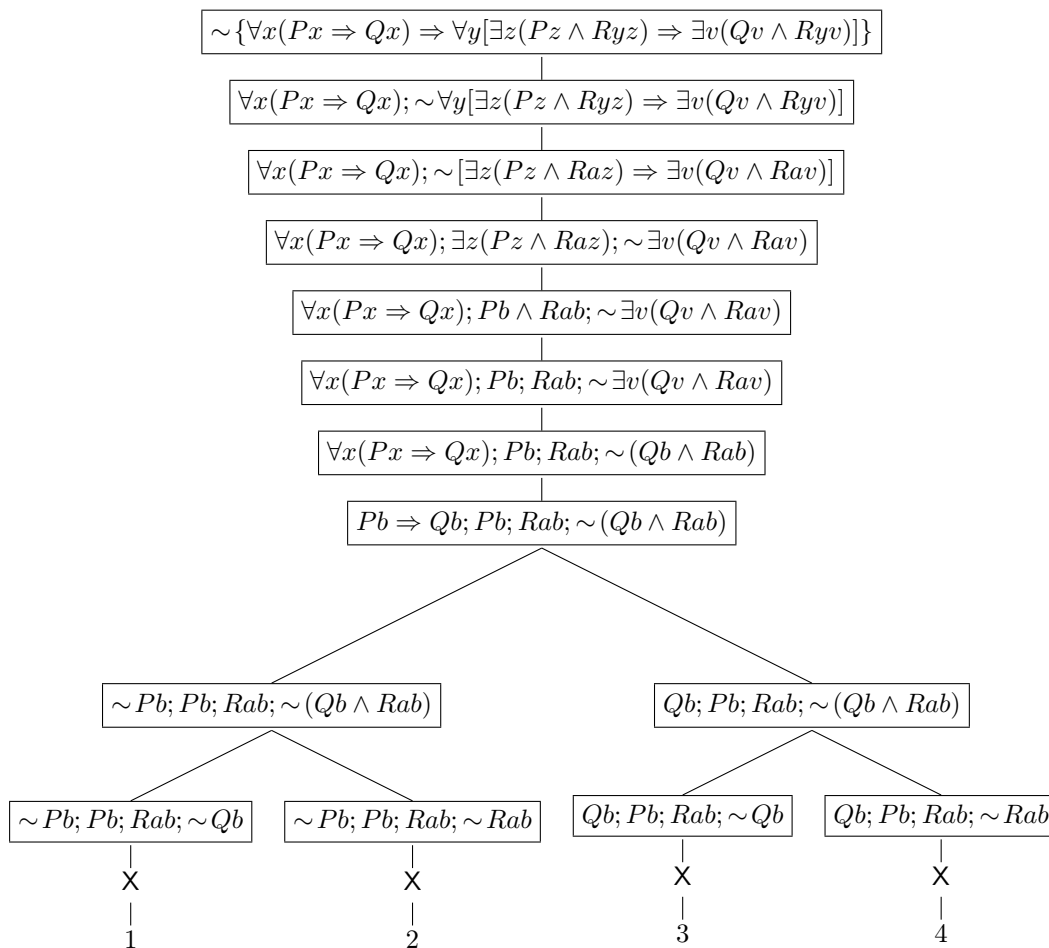
2.3.2 Exemples de démonstration dans le calcul des séquents.

Comme en propositionnel, on s'aide des arbres "à vignettes" pour découvrir la démonstration d'une formule valide dans le calcul des séquents.

1er exemple Soit par ex. la formule correspondant à l'inférence "a-syllogistique" de Jungius / de Morgan⁴ :

$$\forall x(Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow \forall y[\exists z(Pz \wedge Ryz) \Rightarrow \exists v(Qv \wedge Ryv)]$$

L'arbre "à vignettes" pour cette formule se présente ainsi :



4. L'arbre "normal" pour cette inférence est donné à la fin, p. ??.

Des quatre vignettes terminales, comme en propositionnel, on tire les quatre séquents évidemment valides⁵ :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 1 \\ \hline Pb, Rab \rightarrow Pb, Qb \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{c} 2 \\ \hline Pb, Rab \rightarrow Pb, Rab \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{c} 3 \\ \hline Qb, Pb, Rab \rightarrow Qb \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{c} 4 \\ \hline Qb, Pb, Rab \rightarrow Rab \end{array}
 \end{array}$$

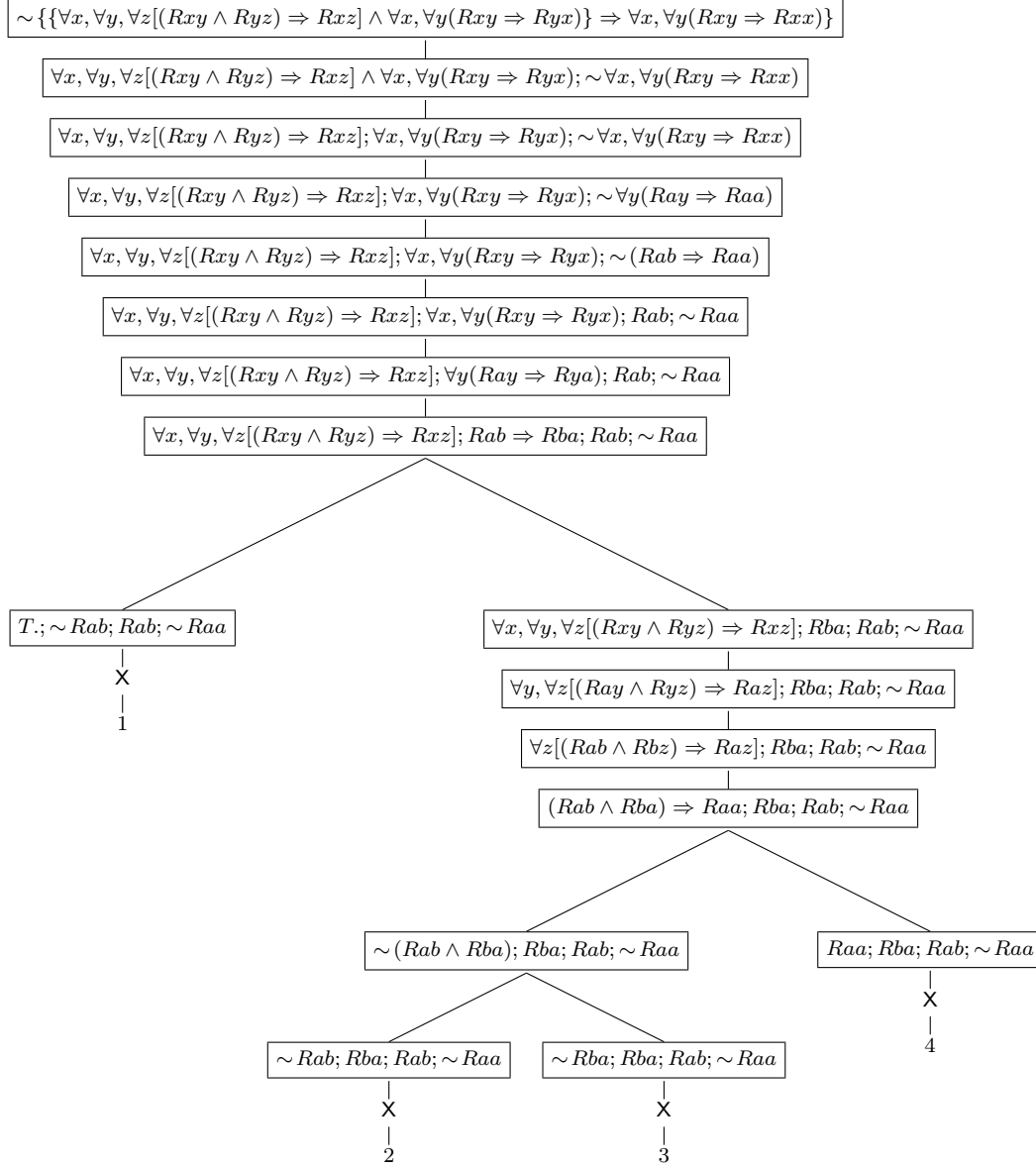
La démonstration dans le calcul des séquents prend alors l'allure suivante :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} Pb, Rab \rightarrow Pb, \underline{Qb} \\ \rightarrow \wedge \\ Pb, Rab \rightarrow \underline{Pb}, Qb \wedge Rab \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{c} Pb, Rab \rightarrow Pb, \underline{Rab} \\ \rightarrow \wedge \\ Pb, Rab \rightarrow \underline{Pb}, Qb \wedge Rab \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{c} Qb, Pb, Rab \rightarrow \underline{Qb} \\ \rightarrow \wedge \\ \underline{Qb}, Pb, Rab \rightarrow Qb \wedge Rab \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{c} Qb, Pb, Rab \rightarrow \underline{Rab} \\ \rightarrow \wedge \\ \underline{Qb}, Pb, Rab \rightarrow Qb \wedge Rab \end{array} \\
 \Rightarrow \rightarrow \\
 Pb \Rightarrow Qb, Pb, Rab \rightarrow Qb \wedge Rab \\
 \forall \rightarrow \\
 \forall x(Px \Rightarrow Qx), Pb, Rab \rightarrow Qb \wedge Rab \\
 \rightarrow \exists \\
 \forall x(Px \Rightarrow Qx), \underline{Pb}, \underline{Rab} \rightarrow \exists v(Qv \wedge Rav) \\
 \wedge \rightarrow \\
 \forall x(Px \Rightarrow Qx), Pb \wedge Rab \rightarrow \exists v(Qv \wedge Rav) \\
 \exists \rightarrow \\
 \forall x(Px \Rightarrow Qx), \exists z(Pz \wedge Raz) \rightarrow \exists v(Qv \wedge Rav) \\
 \rightarrow \Rightarrow \\
 \forall x(Px \Rightarrow Qx) \rightarrow \exists z(Pz \wedge Raz) \Rightarrow \exists v(Qv \wedge Rav) \\
 \rightarrow \forall \\
 \forall x(Px \Rightarrow Qx) \rightarrow \forall y[\exists z(Pz \wedge Raz) \Rightarrow \exists v(Qv \wedge Rav)] \\
 \rightarrow \Rightarrow \\
 \rightarrow \forall x(Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow \{\forall y[\exists z(Pbz \wedge Raz) \Rightarrow \exists v(Qv \wedge Rav)]\}
 \end{array}$$

On remarque que la règle " $\exists \rightarrow$ " a été correctement utilisée puisque b n'apparaît plus dans les autres formules à gauche et à droite de \rightarrow ; de même " $\rightarrow \forall$ " a été correctement utilisée puisque a n'apparaît pas dans la formule à gauche de \rightarrow .

5. Comme en propositionnel, les formules affirmées vont à gauche de " \rightarrow " et les formules niées, à droite.

2ème exemple Soit maintenant un autre exemple, un peu plus long, mais tout aussi simple : la démonstration qu'une relation transitive et symétrique est (simple-ment) réflexive. On fait d'abord l'arbre "à vignette" pour la formule qui exprime cette loi (T . est une abréviation pour la formule exprimant la transitivité)⁶ :



Des quatre vignettes terminales, on tire les quatre séquents évidemment valides

6. L'arbre "normal" pour cette formule est donné à la fin, p. 77.

(le premier n'est pas "élémentaire" puisque l'on n'a pas "analysé" la formule pour la transitivité, mais cela n'a aucune importance) :

$$T., Rab \xrightarrow{1} Rab, Raa \quad \Bigg| \quad Rba, Rab \xrightarrow{2} Rab, Raa \quad \Bigg| \quad Rba, Rab \xrightarrow{3} Rba, Raa \quad \Bigg| \quad Raa, Rba, Rab \xrightarrow{4} Raa$$

La démonstration dans le calcul des séquents se fait maintenant en "remontant" l'arbre :

$$\begin{array}{c}
Rba, Rab \rightarrow \underline{Rab}, Raa \quad Rba, Rab \rightarrow \underline{Rba}, Raa \\
\rightarrow \wedge \\
Rba, Rab \rightarrow \underline{Rab \wedge Rba}, Raa \quad \underline{Raa}, Rba, Rab \rightarrow Raa \\
\Rightarrow \rightarrow \\
(Rab \wedge Rba) \Rightarrow Raa, Rba, Rab \rightarrow Raa \\
\forall \rightarrow \\
\forall z[(Rab \wedge Rbz) \Rightarrow Raz], Rba, Rab \rightarrow Raa \\
\forall \rightarrow \\
\forall y, \forall z[(Ray \wedge Ryz) \Rightarrow Raz], Rba, Rab \rightarrow Raa \\
\forall \rightarrow \\
T., Rab \rightarrow \underline{Rab}, Raa \quad \forall x, \forall y, \forall z[(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz], \underline{Rba}, Rab \rightarrow Raa \\
\Rightarrow \rightarrow \\
\forall x, \forall y, \forall z[(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz], Rab \Rightarrow Rba, Rab \rightarrow Raa \\
\forall \rightarrow \\
\forall x, \forall y, \forall z[(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz], \forall y(Ray \Rightarrow Rya), Rab \rightarrow Raa \\
\forall \rightarrow \\
\forall x, \forall y, \forall z[(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz], \forall x, \forall y(Rxy \Rightarrow Ryx), \underline{Rab} \rightarrow \underline{Raa} \\
\rightarrow \Rightarrow \\
\forall x, \forall y, \forall z[(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz], \forall x, \forall y(Rxy \Rightarrow Ryx) \rightarrow Rab \Rightarrow Raa \\
\rightarrow \forall \\
\forall x, \forall y, \forall z[(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz], \forall x, \forall y(Rxy \Rightarrow Ryx) \rightarrow \forall y(Ray \Rightarrow Raa) \\
\rightarrow \forall \\
\forall x, \forall y, \forall z[(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz] \wedge \forall x, \forall y(Rxy \Rightarrow Ryx) \rightarrow \forall x, \forall y(Rxy \Rightarrow Rxx) \\
\rightarrow \Rightarrow \\
\rightarrow \{\forall x, \forall y, \forall z[(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz] \wedge \forall x, \forall y(Rxy \Rightarrow Ryx)\} \Rightarrow \forall x, \forall y(Rxy \Rightarrow Rxx)
\end{array}$$

Remarquons que l'on a utilisé deux fois, à la fin, la règle " $\rightarrow \forall$ " en respectant le fait que ni a , ni b n'apparaissent dans les autres formules du séquent.

Chapitre 3

Calcul des prédicats avec égalité.

3.1 Embarras logico-philosophiques

Lorsque l'on formalise des théories mathématiques (ou autres, du reste), il est extrêmement commode de disposer d'une constante de prédicat à deux places destinée à exprimer l'identité, constante que l'on note, comme d'habitude "=",¹. Que l'identité soit une notion purement logique, et, même, que l'identité soit une véritable relation, est évidemment discutable et a été fort discuté. Evoquons seulement quelques-unes des difficultés que pose cette "relation".

La première, et la plus évidente, est que dire de deux objets, a et b , qu'ils sont identiques n'a évidemment aucun sens : si a et b sont *deux* objets, c'est qu'ils diffèrent l'un de l'autre et ne peuvent donc être identiques l'un à l'autre. En ce cas, $a = b$ est nécessairement faux et frôle le non-sens absolu.

Si, maintenant, a est un seul (?) objet, dire qu'il est identique à lui-même est un truisme sans aucun intérêt, qui ne dit rien de a , même si cela passe souvent pour la plus évidente des vérités.

Il semble donc que l'on soit enfermé dans un dilemme : soit on a affaire à une contradiction, soit à un truisme.

Il reste que l'on est souvent intéressé à *savoir* que Stendhal est (identique à) Henri Beyle ou que Pascal est (identique à) Dettonville, ou encore que dans un triangle, le point d'intersection des médiatrices est (identique au) le centre du cercle circonscrit au triangle; tout comme, du reste, il peut être intéressant de savoir que F. Bacon n'est pas (l'auteur des pièces de théâtre attribuées à) Shakespeare ou que Fouquet

1. Le fait que l'on parle du calcul des prédicats avec *égalité* et non avec *identité* n'est qu'une concession aux usages historiques, sans signification théorique.

n'est pas l'homme au masque de fer².

Dans ce genre de situation, il se trouve que deux noms, ou deux descriptions, nomment ou décrivent un seul et même objet et que c'est cela que l'on découvre.

Mais ce que l'on sait maintenant, est-ce seulement que deux noms nomment le même objet ? En ce cas, disait Frege, ce savoir serait purement linguistique puisqu'il ne dépendrait que du fait que dans nos langages il y a une surabondance de noms pour des mêmes objets, ce qui est logiquement insignifiant mais pratiquement égarant. Autrement dit, nous n'apprenons pas quelque chose du monde, mais seulement de notre manière de parler du monde. ce qui peut sembler n'avoir qu'une portée des plus limitée. Le plus simple serait alors de se débrouiller pour que le langage que l'on utilise ne comporte pas plusieurs noms pour désigner la même chose, ce qui était à peu près la position de Wittgenstein dans son premier ouvrage, mais qui va directement à l'encontre de ce que font les mathématiciens par ex.³.

On peut cependant essayer de donner un sens acceptable à l'identité en remarquant la chose suivante : du point de vue de la *connaissance* (point de vue épistémologique), lorsque nous établissons une identité comme "Stendhal est Henri Beyle" nous apprenons bien quelque chose, à savoir que le personnage que nous connaissons (par ex.) comme étant l'auteur de *La Chartreuse de Parme* est précisément le même que celui que nous connaissons comme étant né le 23 janvier 1783 à Grenoble (par ex.); ce que nous pouvions parfaitement ignorer jusque là : nous connaissions des traits biographiques de deux personnages qui, pour nous, étaient distincts car ces traits biographiques ne se recoupaient pas. Puis nous découvrons qu'en réalité ces deux personnages ne font qu'un et que nous pouvons donc attribuer à l'un ce qui valait de l'autre et réciproquement. Il s'agit là d'une découverte qui, à l'évidence, accroît notre connaissance et qui ne semble pas purement linguistique puisqu'elle porte sur une personne dont on découvre qu'elle est à la fois l'auteur de *La Chartreuse de Parme* et née le 23 janvier 1783 à Grenoble.

Toutefois, ce n'est là affaire que de *connaissance*, justement. En revanche, ce qui rend vrai l'énoncé "Stendhal est Henri Beyle" est exactement la même chose que ce qui rend vrai l'énoncé "Stendhal est Stendhal", ou "Henri Beyle est Henri Beyle",

2. On remarquera que l'on a affaire ici à un nouveau sens de la copule : on a déjà vu que "est" peut signifier aussi bien l'appartenance d'un élément à une classe que l'inclusion d'une classe dans une autre, ce qui correspond, logiquement à la différence entre $P(a)$ et $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$; on voit, ici, que "est" peut aussi signifier l'identité. La confusion entre ce sens, l'identité, et les autres sens, a conduit, par ex. Hegel et ses sectateurs, à leur étrange conception de "l'identité dans la différence" : "Socrate est philosophe" dit que Socrate est identique à philosophe, tout en en étant différent, etc.

3. Frege expose son analyse de l'identité dans le très célèbre article, traduit sous le titre (malheureux) "Sens et dénotation", dans le recueil d'articles *Ecrits logiques et philosophiques* paru au Seuil; Wittgenstein développe la sienne dans le *Tractatus*. en 4. 24 - 4. 243 et 5. 53 - 5. 5352.

à savoir ce truisme qu'un objet ne peut qu'être identique à lui-même et il s'agit là d'un point de pure *logique*.

Nous n'entrerons pas dans les innombrables discussions que ces difficultés ont suscitées, et admettrons seulement qu'il est trop commode de disposer de l'identité pour s'en passer.

3.2 Lois fondamentales de l'identité

Lorsque l'on envisage la question de l'identité dans le cadre de nos petits langages, on n'a plus affaire à des énoncés d'identité dans lesquels figurent des noms propres ou des descriptions définies (termes singuliers), comme dans les exemples précédents. On voit apparaître des formules dans lesquelles ce sont des variables, libres ou liées, qui figurent dans de tels énoncés. Il est clair alors qu'une formule élémentaire comme $x = y$ est vraie dans un domaine D pour une interprétation i des variables d'individu ssi c'est le même élément du domaine qui interprète les deux variables x et y ; autrement dit ssi $i(x)$ est le même élément de D que $i(y)$ ⁴.

Dans ce qui suit on notera $\mathbf{P}^=$ la relation à deux places qui interprète "=" dans un domaine D quelconque. Cette relation est définie de la même manière dans tous les domaines par : $\mathbf{P}^= = \{ \langle a, a \rangle : a \in D \}$. Ce qui revient à dire que $\mathbf{P}^=$ est l'ensemble des paires ordonnées dans lesquelles figurent deux fois le même élément.

Ainsi, étant donné un domaine D et une interprétation i des variables d'individu, on a :

$$D \models_i x = y \text{ ssi } \langle i(x), i(y) \rangle \in \mathbf{P}^=.$$

Il suit de cette définition toutes sortes de choses intéressantes (!). On a en effet, tout d'abord, que $\forall x(x = x)$ est valide puisque dans tout domaine et quelle que soit l'interprétation i des variables d'individu, on a : $\langle i(x), i(x) \rangle \in \mathbf{P}^=$; ce qui ne fait qu'exprimer la réflexivité de l'identité.

4. Comme on le voit, on est obligé d'utiliser une tournure en français qui est elle-même suspecte puisque l'on est amené à dire que " $i(x)$ est *le même* élément de D que $i(y)$ ", ce qui revient à dire tout simplement, que $i(x) = i(y)$! Mais on est déjà confronté à ce genre de situation lorsque l'on spécifie à quelle condition une formule de la forme, par ex., $\varphi \wedge \psi$ est vraie (pour une interprétation, etc.) : on est contraint d'utiliser "et" dans le métalangage, et ce "et" a exactement les mêmes "propriétés logiques" que le " \wedge " de la formule.

Il suit également de cette définition le principe leibnizien de la substituabilité *salva veritate* des identiques, que l'on peut illustrer simplement ainsi.

Considérons une quelconque lettre de prédicat P à une place et la formule $P(x)$ et supposons $x = y$ vrai dans un domaine D quelconque pour une interprétation i des variables d'individu. On a donc $i(x) = i(y)$. On montre facilement que l'on a alors : $D \models P(x) \Rightarrow P(y)$. En effet, supposons $P(x)$ vrai dans D pour i ; cela signifie que $i(x) \in \mathbf{P}$, \mathbf{P} étant l'interprétation de P dans D ($\mathbf{P} \subseteq D$). Comme $i(x)$ est le même élément de D que $i(y)$, cela signifie que $i(y) \in \mathbf{P}$ et donc que $P(y)$ est vrai dans D pour i . Même chose si $P(x)$ est faux dans D pour i .

Comme le domaine et les interprétations des lettres de prédicat et des variables d'individu étaient parfaitement quelconques dans ce qui précède, cela vaut en général, et non seulement pour des formules élémentaires, mais pour toute formule dans laquelle une variable figure libre. On admet dans ce qui suit que $\varphi[x]$ est une formule dans laquelle x figure libre, que y est libre pour x dans φ ⁵ et que $\varphi[y/x]$ est le résultat de la substitution de y à x dans φ en toutes ou seulement certaines des occurrences libres de x dans φ . De la discussion précédente, il suit que toutes les formules de la forme

$$\forall x, \forall y [x = y \Rightarrow (\varphi[x] \Rightarrow \varphi[y/x])]$$

sont valides. C'est ce que l'on appelle traditionnellement la "loi de Leibniz".

En résumé, on a deux "lois" de l'identité qui suivent de la définition "sémantique" que l'on a donnée ci-dessus, à savoir (en se souvenant des conventions d'écriture pour la seconde) :

$$\begin{aligned} I_1 & \models \forall x (x = x) \\ I_2 & \models \forall x, \forall y [x = y \Rightarrow (\varphi[x] \Rightarrow \varphi[y/x])] \end{aligned}$$

Symétrie et transitivité de l'identité

On peut maintenant démontrer la symétrie et la transitivité de l'identité.

Pour ce faire, on admettra dans les déductions qui suivent quelques lois logiques simples en premier ordre :

5. Rappel : " y est libre pour x dans φ " signifie que x ne figure pas libre dans une sous-formule de φ qui est dans la portée d'un quantificateur en y . Par ex. dans la formule : $\forall y (P(x) \Rightarrow Q(y))$, y n'est pas libre pour x car si l'on remplace x par y , y se trouve dans la portée de $\forall y$ et n'est donc pas libre, là où x était libre.

- α . $\forall x(\varphi[x] \Rightarrow \psi[x]) \Rightarrow (\forall x\varphi[x] \Rightarrow \forall x\psi[x])$ d'où il suit que l'on peut déduire

$$\begin{array}{c} \vdash \forall x\varphi[x] \Rightarrow \forall x\psi[x] \\ \text{de} \\ \vdash \forall x(\varphi[x] \Rightarrow \psi[x]) \end{array}$$

- β . $\forall x(\varphi \Rightarrow \psi[x]) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \forall x\psi[x])$ lorsque x n'est pas libre dans φ (loi de passage), d'où il suit que l'on peut déduire

$$\begin{array}{c} \vdash (\varphi \Rightarrow \forall x\psi[x]) \\ \text{de} \\ \vdash \forall x(\varphi \Rightarrow \psi[x]) \end{array}$$

lorsque x n'est pas libre dans φ .

- γ . $\forall x, \forall y \{ (\varphi[x] \Rightarrow \psi[y]) \Rightarrow \forall z \{ (\psi[y] \Rightarrow \theta[z]) \Rightarrow (\varphi[x] \Rightarrow \theta[z]) \} \}$

ce qui est une forme particulière (celle dont on se servira ci-dessous) du principe du syllogisme en premier ordre.

On a alors la déduction suivante pour la symétrie :

$$\begin{array}{ll} \vdash \forall x, \forall y [x = y \Rightarrow (x = \mathbf{x} \Rightarrow y = \mathbf{x})] & (1) \quad I_2 \text{ en faisant } \varphi[\dots] : \text{''} \dots = \mathbf{x}\text{''} \\ \vdash \forall x, \forall y [x = x \Rightarrow (x = y \Rightarrow y = x)] & (2) \quad \text{permutation dans la sous-formule de (1)} \\ \vdash \forall x [x = x \Rightarrow \forall y (x = y \Rightarrow y = x)] & (3) \quad \beta. \text{ sur (2)} \\ \vdash \forall x (x = x) \Rightarrow \forall x, \forall y (x = y \Rightarrow y = x) & (4) \quad \alpha. \text{ sur (3)} \\ \vdash \forall x (x = x) & (5) \quad I_1 \\ \vdash \forall x, \forall y (x = y \Rightarrow y = x) & (6) \quad MP \text{ sur (4) et (5)} \end{array}$$

Et pour la transitivité, on a :

$$\begin{array}{ll} \vdash \forall x, \forall y \{ \overbrace{(x = \mathbf{y})}^{\varphi[x]} \Rightarrow \overbrace{(y = \mathbf{x})}^{\psi[y]} \Rightarrow \forall z \{ \overbrace{(y = \mathbf{x})}^{\psi[y]} \Rightarrow \overbrace{(y = z \Rightarrow x = z)}^{\theta[z]} \} \Rightarrow \overbrace{(x = \mathbf{y})}^{\varphi[x]} \Rightarrow \overbrace{(y = z \Rightarrow x = z)}^{\theta[z]} \} & (1) \quad \text{subst. dans } \gamma. \\ \vdash \forall x, \forall y (x = \mathbf{y} \Rightarrow y = \mathbf{x}) \Rightarrow \forall x, \forall y, \forall z \{ [y = \mathbf{x} \Rightarrow (y = z \Rightarrow x = z)] \Rightarrow [x = \mathbf{y} \Rightarrow (y = z \Rightarrow x = z)] \} & (2) \quad \alpha \text{ 2 fois sur (1).} \\ \vdash \forall x, \forall y (x = y \Rightarrow y = x) & (3) \quad \text{Symétrie} \\ \vdash \forall x, \forall y, \forall z \{ [y = x \Rightarrow (y = z \Rightarrow x = z)] \Rightarrow [x = y \Rightarrow (y = z \Rightarrow x = z)] \} & (4) \quad MP \text{ sur (2), (3)} \\ \vdash \forall x, \forall y, \forall z [y = x \Rightarrow (y = z \Rightarrow x = z)] \Rightarrow \forall x, \forall y, \forall z [x = y \Rightarrow (y = z \Rightarrow x = z)] & (5) \quad \alpha. \text{ 3 fois sur (4)} \\ \vdash \forall x, \forall y, \forall z [y = x \Rightarrow (y = \mathbf{z} \Rightarrow x = \mathbf{z})] & (6) \quad I_2 \text{ avec } \varphi[\dots] : \text{''} \dots = \mathbf{z}\text{''} \\ \vdash \forall x, \forall y, \forall z [x = y \Rightarrow (y = z \Rightarrow x = z)] & (7) \quad MP \text{ sur (5), (6)} \end{array}$$

Pour (1), les substitutions dans γ se font de la manière suivante :

$$\begin{array}{lll} \varphi[\dots] & \rightarrow & \text{"}\dots = \mathbf{y}\text{"} & \text{ou, si l'on veut : "identique à } y\text{"}. \\ \psi[\dots] & \rightarrow & \text{"}\dots = \mathbf{x}\text{"} & \text{ou si l'on veut : "identique à } x\text{"}. \\ \theta[\dots] & \rightarrow & \text{"}\mathbf{y} = \dots \wedge \mathbf{x} = \dots\text{"} & \text{ou si l'on veut : " } x \text{ et } y \text{ sont identiques à une même chose"}. \end{array}$$

On peut, de la même manière, démontrer "l'indiscernabilité des identiques", qu'exprime la formule :

$$\forall x, \forall y [x = y \Rightarrow (\varphi[x] \Leftrightarrow \varphi[y/x])]$$

3.3 Ce que l'on peut "dire" avec l'identité

Disposant de l'identité, on peut maintenant exprimer toutes sortes de choses concernant un domaine et des "propriétés" ou "relations"; ce que l'on ne pouvait faire précédemment.

Cardinalité du domaine.

Soit la formule :

$$\exists x, \exists y (x \neq y)$$

Il est aisé de voir que cette formule n'est vraie dans un domaine quelconque que si ce domaine contient *au moins* deux éléments. S'il n'en contenait qu'un, disons a , alors il n'y aurait qu'une seule interprétation i des variables, de sorte que, nécessairement, $i(x) = i(y)$, ce qui contredirait $x \neq y$. Par contre, évidemment, cette formule est vraie dans un domaine contenant plus de deux éléments.

Soit maintenant la formule :

$$\exists x, \exists y [x \neq y \wedge \forall z (z = x \vee z = y)]$$

ou bien de manière équivalente :

$$\exists x, \exists y [x \neq y \wedge \sim \exists z (z \neq x \wedge z \neq y)]$$

Le premier membre de la conjonction "dit", comme précédemment, qu'il y a au moins deux éléments dans le domaine d'interprétation. Le second "dit" que, quelle que soit l'interprétation que l'on donne à z , elle doit coïncider avec celle de x ou avec celle de y ; ou bien, dans la deuxième formulation équivalente : il n'existe pas, dans le domaine, d'élément distinct de x et y , ce qui revient à dire, tout simplement, qu'il n'y a pas plus de deux éléments dans le domaine. Cette formule "dit", donc, qu'il y a, au moins et au plus, deux éléments dans le domaine.

Remarque : il n'est pas très exact de dire que *la formule "dit" que ceci ou cela* : à proprement parler une formule ne dit rien d'un domaine; mais, nous pouvons tirer du fait que, par ex., la formule précédente est vraie dans un domaine quelconque, que ce domaine contient deux éléments, ni plus ni moins. Cette propriété d'un domaine n'est pas ce qu'exprime la formule, toutefois, on peut bien dire que *si* la formule est vraie dans un domaine, *alors* le domaine a cette propriété (et réciproquement). On dit qu'une propriété de ce genre est une *propriété du premier ordre*. Nous continuerons cependant d'utiliser cette manière de s'exprimer en raison de sa commodité.

Comment exprimer seulement qu'un domaine contient *au plus* deux éléments? Tout simplement en niant qu'il en contient trois! Ce que "dit" la formule :

$$\sim \exists x, \exists y, \exists z(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)^6$$

On pourrait donc également exprimer le fait qu'un domaine contient deux éléments, ni plus ni moins, par la conjonction de la première formule ci-dessus et cette dernière formule, ce qui donne :

$$\exists x, \exists y(x \neq y) \wedge \sim \exists x, \exists y, \exists z(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$$

Ce qui précède est facilement généralisable : la formule "disant", par ex., qu'il y a au moins quatre éléments dans un domaine quelconque, s'écrit :

$$\exists x, \exists y, \exists z, \exists t(x \neq y \wedge x \neq z \wedge x \neq t \wedge y \neq z \wedge y \neq t \wedge z \neq t)$$

En général, donc,

$$\exists x_1, \exists x_2, \dots, \exists x_n(x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge \dots \wedge x_{n-1} \neq x_n)$$

6. En vertu de lois logiques élémentaires, cette formule peut s'écrire également : $\forall x, \forall y, \forall z(x = y \vee x = z \vee y = z)$.

"dit" qu'il y a au moins n éléments dans un domaine et sa négation qu'il y en a plus $n - 1$ ⁷.

"Propriétés" de propriétés et de relations.

On a déjà vu comment exprimer un certain nombre de "propriétés formelles" des relations, comme, par ex., la transitivité, la symétrie, etc. On peut maintenant aller plus loin.

Propriétés.

Comme précédemment, à propos d'un domaine en général, on peut exprimer le fait qu'une propriété vaut de un, deux, trois, ou plus d'éléments d'un domaine. Le cas le plus intéressant est aussi le plus simple, c'est celui des *descriptions définies*, autrement dit des propriétés qui ne valent que d'un et d'un seul objet. Dans la langue naturelle on trouve des expressions comme : "l'actuel roi de France", "l'auteur de *La chartreuse de Parme*", "l'assassin du Docteur Lenoir", etc. qui sont censées désigner un et un seul individu, expressions que la tradition appelait « terme singulier » Cette manière de désigner des individus a été particulièrement étudiée par Russell dans le cadre de la question générale : quelle valeur de vérité attribuer à des énoncés singuliers comportant un nom propre ou une description définie ne nommant ou ne désignant rien de réel, comme : "Pégase est un cheval ailé" ou "l'actuel roi de France est chauve" ou même "Pégase n'existe pas" ?

Parmi les problèmes, classiques, que posent des énoncés de ce genre on trouve les suivants. Si l'on admet, par ex., que "Pégase est un cheval" est vrai ou faux, c'est que l'on admet que ce que nomme "Pégase" est, ou n'est, pas un cheval. Or, comme le disait plaisamment Russell, si l'on consulte la liste des chevaux, on n'y trouve pas Pégase et si l'on consulte la liste des non-chevaux, on n'y trouve pas non plus Pégase. "Pégase est un cheval" n'est donc ni vrai, ni faux ; il faut donc renoncer au principe du Tiers Exclu dans ce cas ; ce qui peut en choquer plus d'un !

Dans le cas de "Pégase n'existe pas", le problème est que cet énoncé semble parfaitement vrai, alors qu'il dit de ce que nomme le nom "Pégase" - et qui donc existe si "Pégase" est un authentique nom propre - que précisément il n'existe pas. Il semble donc que pour dire *de quelque chose* qu'il n'existe pas, il faut admettre qu'il existe.

7. On oublie ici le double indiçage des variables d'individu, en admettant que " x " est une métavariante.

On ne rentrera pas ici dans les détails des discussions qu'a suscitées ce genre de difficultés. La solution de Russell consiste à reconnaître que les descriptions définies ne sont pas des "termes singuliers" comme on disait, mais des énoncés qui sont vrais ou faux. Ainsi "l'actuel roi de France" s'analyse en : il existe quelque chose qui est un actuel roi de France et ce quelque chose est unique ; on doit alors analyser un énoncé comme "l'actuel roi de France est chauve" comme disant qu'il existe quelque chose qui est un actuel roi de France, que ce quelque chose est unique et que ce quelque chose est chauve. Cette conjonction est donc simplement fausse puisque la propriété d'être un actuel roi de France est vide. Et "l'actuel roi de France n'existe pas" s'analyse alors en : il est faux qu'il existe quelque chose qui est un actuel roi de France et que ce quelque chose soit unique, ce qui est parfaitement vrai⁸.

Dans notre symbolisme, le fait qu'une propriété **P** ne vaille que d'un et un seul élément d'un domaine se traduit donc simplement par :

$$\exists x(Px \wedge \forall y(Py \Rightarrow y = x))$$

ou bien de manière équivalente :

$$\exists x(Px \wedge \sim \exists y(Py \wedge y \neq x))$$

ce qui peut se traduire par : il existe un x qui est **P** et si quelque chose d'autre est un **P**, alors cette autre chose est identique à x , ou bien : il existe un x qui est **P** et il n'existe rien d'autre qui soit **P** et distinct de x . Ainsi, si cette formule est vraie dans un domaine pour une interprétation des lettres de prédicat, c'est que la propriété qui interprète la lettre de prédicat P ne vaut que d'un et un seul élément du domaine⁹.

On pourrait évidemment exprimer, sur le même modèle, qu'une propriété ne vaut que de deux éléments, ni plus ni moins, d'un domaine, ce qui donnerait :

$$\exists x, \exists y[x \neq y \wedge Px \wedge Py \wedge \forall z(Pz \Rightarrow (z = x \vee z = y))]$$

8. La thèse plus philosophiquement discutable que défendait Russell est que la plupart des noms propres de nos langages naturels sont en réalité des descriptions définies déguisées. Cette thèse a été sévèrement critiquée par des auteurs contemporains, en particulier par S. Kripke dans *La logique des noms propres* (Les éditions de minuit, 1982)

9. De manière plus exacte : il n'y a qu'un et un seul élément du domaine qui appartient à **P**, interprétation de P . Nous nous permettrons cette manière de parler plus relâchée, mais plus intuitive.

Il est maintenant facile de généraliser à un nombre quelconque d'éléments.

Notons que sans l'identité, on ne peut que "dire" quelque chose comme :

$$\exists x, \exists y(Px \wedge Py)$$

qui n'implique nullement qu'il y ait deux éléments ayant la propriété **P**, ni qu'il n'y en ait que deux. Car rien n'interdit qu'il n'y en ait qu'un, puisque cette formule est équivalente à $\exists x Px \wedge \exists y Py$ qui est clairement vraie dans un domaine et pour une interprétation des lettres de prédicat même s'il n'y a qu'un élément du domaine qui a la propriété **P**. Et cette formule est évidemment vraie dans un domaine et pour une interprétation des lettres de prédicat s'il y a plus de deux éléments du domaine qui ont la propriété **P**; en fin de compte, la seule chose que "dit" cette formule est qu'il y a au moins un élément ayant la propriété **P**, ce qui est peu informatif.

Relations

Le plus intéressant concerne, comme d'habitude, les relations.

On peut tout d'abord compléter quelque peu ce qui a été dit à propos de la symétrie. On a vu qu'une relation est symétrique ssi, si elle se tient entre deux éléments a et b , alors elle se tient entre b et a ($\forall x, \forall y(Rxy \Rightarrow Ryx)$); et une relation est asymétrique si cela n'est jamais le cas ($\forall x, \forall y(Rxy \Rightarrow \sim Ryx)$). A cela s'ajoute qu'une relation peut être *antisymétrique* : par ex. la relation entre entiers naturels que l'on note habituellement " \leq " est telle que si $n \leq m$ et $m \leq n$ alors $n = m$. De la même manière, la relation d'inclusion entre ensembles (ou classes) que l'on note " \subseteq " est telle que si $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ alors $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Grâce à l'identité, on peut exprimer cette propriété d'une relation de la manière suivante :

$$\forall x, \forall y[(Rxy \wedge Ryx) \Rightarrow x = y]$$

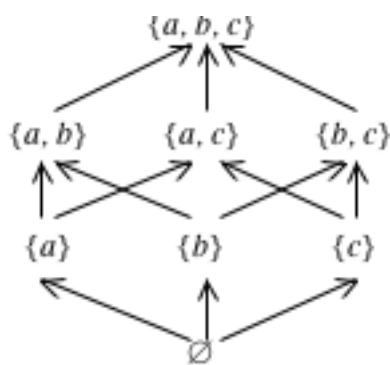
Ordre.

Soit maintenant un domaine D et une relation à deux places **R** sur D qui interprète la lettre de prédicat (à deux places) R . Supposons que dans ce domaine et pour cette interprétation de R les trois formules suivantes soient vraies :

- i. $\forall x Rxx$
- ii. $\forall x, \forall y, \forall z [(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz]$
- iii. $\forall x, \forall y [(Rxy \wedge Ryx) \Rightarrow x = y]$

La première formule "dit" que la relation \mathbf{R} est totalement réflexive, la seconde qu'elle est transitive et la troisième qu'elle est antisymétrique. On dira dans ce cas que D est partiellement ordonné par \mathbf{R} ¹⁰.

Par ex. si l'on considère l'ensemble $\wp(\mathbf{A})$ des parties d'un ensemble \mathbf{A} ; la relation \subseteq est un ordre partiel sur $\wp(\mathbf{A})$ puisque clairement cette relation est (totalement) réflexive, transitive et antisymétrique sur $\wp(\mathbf{A})$ pris ici comme domaine. On peut représenter cela de la manière suivante pour un micro-ensemble $\mathbf{A} = \{a, b, c\}$:



Les flèches représentent officiellement la relation d'inclusion et se lisent de telle sorte que si une flèche mène d'un point α à un autre β , et une autre flèche de β à un troisième point γ , alors on admet qu'une flèche (non tracée!) relie α à β . De la même manière, on admet qu'une flèche (en boucle) relie chaque point à lui-même. Il est évidemment loisible, même si cela n'a aucune signification véritable, de lire ces flèches comme "disant", par ex., que $\{a\}$ est "avant" $\{a, c\}$ qui est à son tour "avant" $\{a, b, c\}$; ou comme "disant" que $\{a\}$ est "plus petit que" $\{a, c\}$ qui est à son tour "plus petit que" $\{a, b, c\}$, etc. Ce qui seul importe ici est que ces relations ont les mêmes "propriétés formelles".

On remarque que certains points ne sont pas reliés par une ou des flèches : par ex. le point $\{c\}$ n'est relié par aucune flèche au point $\{a, b\}$, ce qui signifie qu'il n'y a pas "d'ordre" entre $\{c\}$ et $\{a, b\}$. C'est pourquoi on parle d'ordre *partiel*.

¹⁰. Cette manière de s'exprimer n'est pas absolument correcte, mais ce n'est pas très compromettant ici.

Il se pourrait qu'une relation \mathbf{R} soit telle qu'elle induise sur un domaine D , non seulement un ordre partiel, mais un ordre *total* (ou *linéaire*), c'est à dire qu'il se pourrait que deux éléments quelconques du domaine soient toujours reliés par \mathbf{R} . Il faut alors que soient vraies dans ce domaine et pour l'interprétation de la lettre de prédicat à deux places R par \mathbf{R} , non seulement les trois formules précédentes exprimant que \mathbf{R} est (totalement) réflexive, transitive et antisymétrique, mais également la formule :

$$\text{iv.} \quad \forall x, \forall y (Rxy \vee Ryx)$$

Un exemple simple d'ordre total, est offert par l'ensemble des entiers naturels ordonnés par la relation \mathbf{R} : " \leq ", ou, de manière plus imagée, par un collier de perles ouvert (petite question : pourquoi le collier doit-il être ouvert ?). Il est clair qu'un ordre total est *a fortiori* un ordre partiel.

Supposons maintenant que soient vraies dans D , toujours pour l'interprétation \mathbf{R} de la lettre de prédicat R , les deux formules suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{v.} & \forall x, \forall y [(Rxy \wedge x \neq y) \Rightarrow \exists z (Rxz \wedge Rzy \wedge z \neq x \wedge z \neq y)] \\ \text{vi.} & \exists x, \exists y (x \neq y) \end{array}$$

La première de ces formules "dit" quelque chose comme : étant donné deux éléments distincts du domaine entretenant la relation \mathbf{R} , il existe un troisième élément, différent des deux premiers, qui vient "s'intercaler" entre eux. La deuxième formule "dit", tout simplement (cf. plus haut) qu'il y a au moins deux éléments dans le domaine.

Examinons ce qu'impliquent ces deux formules (étant entendu que l'on sait déjà que \mathbf{R} induit un ordre total sur D). Soit a et b les deux éléments distincts de D dont on est assuré qu'ils existent par vi.. En vertu de v. on sait qu'il existe un élément c , distinct de a et de b , tel que l'on a $\langle a, c \rangle \in \mathbf{R}$ et $\langle c, b \rangle \in \mathbf{R}$. Comme, maintenant, on a $\langle a, c \rangle \in \mathbf{R}$, il existe donc un élément, d , distinct de a et de c tel que l'on a $\langle a, d \rangle \in \mathbf{R}$ et $\langle d, c \rangle \in \mathbf{R}$. Cet élément ne peut être identique à b puisqu'alors on aurait $\langle b, c \rangle \in \mathbf{R}$ et donc, par iii., puisque l'on a également $\langle c, b \rangle \in \mathbf{R}$, on aurait $b = c$ contrairement à ce qui a été posé lorsque l'on a "introduit" c . d est donc distinct de a , de b et de c ; c'est un quatrième élément qu'il faut admettre présent dans D .

On voit que le même raisonnement conduirait à poser la présence dans D d'un cinquième élément e "entre" c et b (i.e. tel que $\langle c, e \rangle \in \mathbf{R}$ et $\langle e, b \rangle \in \mathbf{R}$). On a donc maintenant : $\langle a, d \rangle \in \mathbf{R}$, $\langle d, c \rangle \in \mathbf{R}$, $\langle c, e \rangle \in \mathbf{R}$ et $\langle e, b \rangle \in \mathbf{R}$,

et pour chacune des paires ordonnées $\langle a, d \rangle$, $\langle d, c \rangle$, $\langle c, e \rangle$, $\langle e, b \rangle$, il faut recommencer ce même petit raisonnement, ce qui conduit à chaque fois à poser la présence dans D de nouveaux éléments "entre" les précédents, et ainsi de suite sans fin. Il en résulte qu'entre chaque paire d'éléments de D , il y a une "infinité" d'éléments et donc, *a fortiori*, que D lui-même comporte une "infinité" d'éléments (comparer avec la formule prise comme exemple de formule qui ne peut qu'être "infini-satisfiable", p. 46 ; voir également l'Appendice C).

Un exemple simple de ce type d'ordre est celui des nombres rationnels : entre deux rationnels, il en existe une "infinité". On appelle ce type d'ordre, un ordre (total) *dense*. De la même manière, les points sur une droite euclidienne "rationnelle", ordonnés par la relation "à gauche" (ou "à droite" !) constituent un ordre dense.

On peut maintenant préciser si un ordre (total) dense admet un premier élément ou non, un dernier élément ou non. Ainsi, par ex. si la formule suivante est vraie dans D pour l'interprétation \mathbf{R} de la lettre de prédicat R ,

$$\text{vii.} \quad \forall x, \exists y (Rxy \wedge x \neq y)$$

alors il n'y a pas de "dernier" élément (relativement à \mathbf{R}) dans D .

De la même manière, si la formule suivante est vraie dans D pour l'interprétation \mathbf{R} de la lettre de prédicat R ,

$$\text{viii.} \quad \forall x, \exists y (Ryx \wedge x \neq y)$$

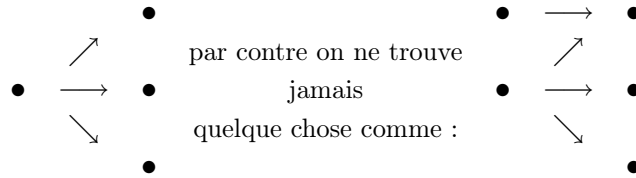
alors il n'y a pas de "premier" élément (relativement à \mathbf{R}) dans D ¹¹.

Relations de "un à plusieurs", de "plusieurs à un", "un-un"

Outre les propriétés classiques des relations que l'on déjà eu l'occasion d'évoquer et qui peuvent s'exprimer sans recours à l'identité (cf. p. 17), il y a d'autres propriétés tout aussi importantes qui ne peuvent s'exprimer qu'à l'aide de l'identité.

Soit par ex., la relation " x est père de y " ; il est clair que si un individu mâle peut être père de nombreux enfants, un enfant ne peut avoir plusieurs pères (dans l'état actuel des technologies de la procréation, en tout cas...). Une relation comme celle-là est, dit-on, "de un (père) à plusieurs (enfants)" (ce qui n'impose nullement, évidemment, que tout père ait plusieurs enfants!). On peut représenter cela de la manière suivante :

11. A titre d'exercice élémentaire, on pourra écrire les formules "disant" qu'il y un dernier / un premier élément dans D (relativement à \mathbf{R}).

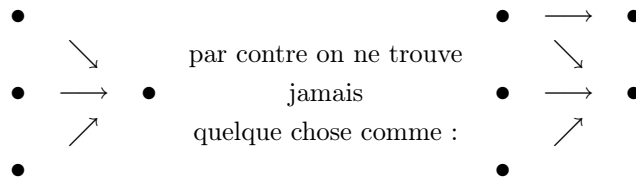


Pour exclure la situation figurée à droite, il faut donc que l'on puisse "dire" qu'un même conséquent de la relation ne peut avoir plusieurs antécédents; ce que l'on peut faire avec l'identité, comme on l'a vu plus haut : il suffit de "dire" que si un conséquent à plusieurs antécédents, ils sont tous identiques entre eux. Si donc la formule :

$$\forall x, \forall y, \forall z [(Rxz \wedge Ryz) \Rightarrow x = y]$$

est vraie dans un domaine D pour l'interprétation \mathbf{R} de la lettre de prédicat R , \mathbf{R} est de un à plusieurs. Pour éviter le cas trivial de la relation vide, qui satisfait évidemment la formule précédente, il suffirait de conjoindre cette formule à $\exists x, \exists y Rxy$.

De la même manière, en renversant l'exemple précédent, la relation " x est enfant du mâle y " est telle que plusieurs individus peuvent être enfants d'un même mâle, mais qu'un même individu ne peut être enfant de plusieurs mâles. Une relation de ce genre est dite, en conséquence "de plusieurs à un", ce que l'on peut figurer de la manière suivante :



Et, tout comme précédemment, si la formule :

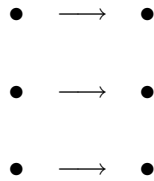
$$\forall x, \forall y, \forall z [(Rxy \wedge Rxz) \Rightarrow y = z]$$

est vraie dans un domaine D pour l'interprétation \mathbf{R} de la lettre de prédicat R , \mathbf{R} est de plusieurs à un (même remarque que précédemment pour le cas de la relation vide).

Il est clair que si une relation est de un à plusieurs, sa converse est, elle, de plusieurs à un et réciproquement; l'exemple des relations familiales pris ci-dessus

permet de s'en convaincre ; mais il est toujours possible de le démontrer...

Enfin, dans un société monogame et monoandre, la relation " x est l'épouse de y " ainsi que sa converse, " x est l'époux de y " sont toutes les deux à la fois de un à plusieurs et de plusieurs à un. Ces relations sont, dit-on, "un-un", ce que l'on peut figurer tout simplement de la manière suivante :



Pour "dire" d'une relation \mathbf{R} qu'elle est un-un il suffit donc de prendre la conjonction des deux précédentes formules. On se convaincra aisément (mais il est toujours possible de le démontrer...) que la converse d'une relation un-un est elle-même un-un ; que le produit relatif de deux relations un-un est lui-même un-un.

3.3.1 Arbres pour les formules avec identité

Pour terminer, il reste à montrer comment l'on peut étendre la méthode des arbres pour pouvoir traiter les formules dans lesquelles figure l'identité. Il s'agit donc de donner les règles qui correspondent aux propriétés de l'identité que l'on a indiquées plus haut à savoir la réflexivité et la loi de Leibniz. La réflexivité nous permet d'introduire sur une branche comportant des formules dans lesquelles figurent des constantes, a par ex., des formules de la forme $a = a$. La loi de Leibniz permet, elle, lorsqu'une formule de la forme $\varphi[a]$ apparaît sur une branche, ainsi qu'une formule de la forme $a = b$, de substituer b à a dans φ . On peut donc donner les règles suivantes :

Réfl.	LL
$\frac{\vdots}{a = a}$	$a = b$
$a = a$	\vdots
" a " dans une formule figurant sur la branche	$\varphi[a]$
	Cette règle vaut dans les deux sens :
	\vdots
	$a \rightarrow b \text{ et } b \rightarrow a$
	$\frac{\vdots}{\varphi[b]}$

Que $a = b$ soit au dessus, ou au dessous, de $\varphi[a]$
n'a aucune importance.

Remarque : on peut immédiatement fermer une branche sur laquelle figure une formule de la forme $a \neq a$, puisque l'on pourrait toujours ajouter $a = a$ en vertu de la règle Réfl., ce qui ferait apparaître une contradiction.

A titre d'exemple trivial, considérons la formule exprimant la transitivité de "=" : $\forall x, \forall y, \forall z (x = y \wedge y = z) \Rightarrow x = z$. L'arbre (chétif!) pour cette formule est le suivant :

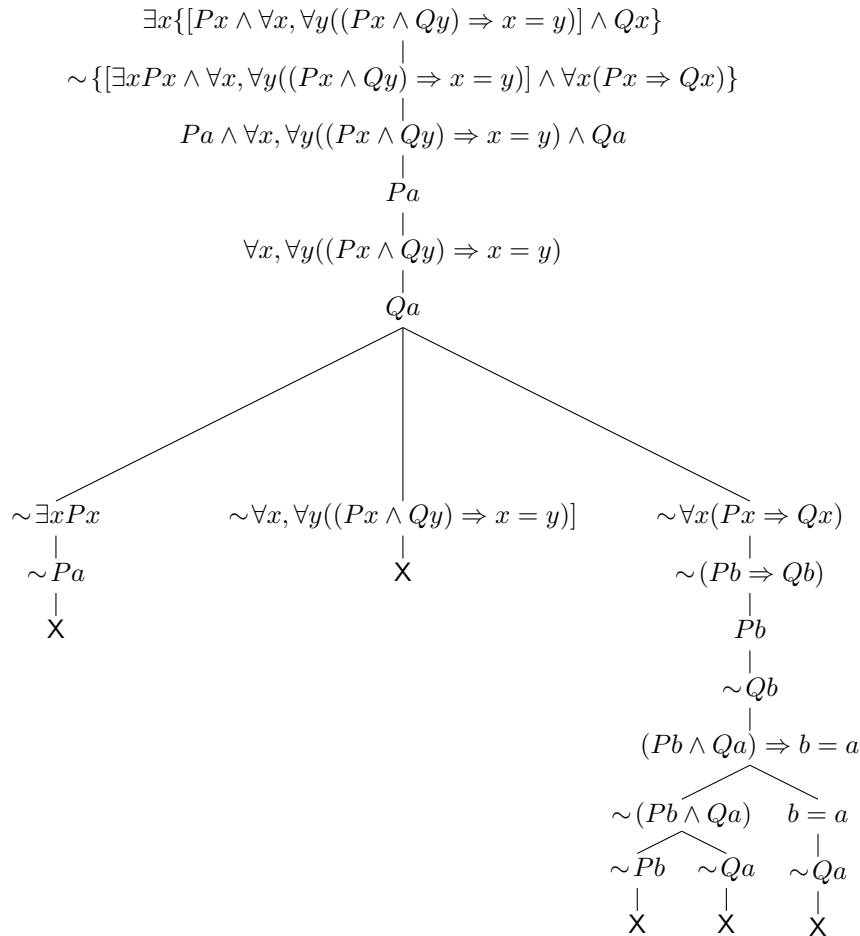
$$\begin{array}{c}
 \sim \forall x, \forall y, \forall z [(x = y \wedge y = z) \Rightarrow x = z] \quad (1) \\
 | \\
 \sim [(a = b \wedge b = c) \Rightarrow a = c] \quad (2) \\
 | \\
 a = b \wedge b = c \quad (3) \\
 | \\
 a \neq c \quad (4) \\
 | \\
 a = b \quad (5) \\
 | \\
 b = c \quad (6) \\
 | \\
 a = c \quad (7) \\
 | \\
 \times
 \end{array}$$

Explication : (2) sur (1) par la règle " $\sim \forall$ " trois fois ; (3), (4) sur (2) par la règle " $\sim \Rightarrow$ " ; (5), (6) sur (3) par la règle " \wedge " ; et enfin (7) par la règle "LL" en substituant c à b dans (5) en vertu de (6).

L'exemple suivant est plus amusant. On fait l'arbre pour la formule :

$$\exists x \{ [Px \wedge \forall x, \forall y ((Px \wedge Qy) \Rightarrow x = y)] \wedge Qx \} \Rightarrow \{ [\exists x Px \wedge \forall x, \forall y ((Px \wedge Qy) \Rightarrow x = y)] \wedge \forall x (Px \Rightarrow Qx) \}$$

On commence l'arbre directement en écrivant l'un sous l'autre l'antécédent et la négation du conséquent.



Explications sommaires : par souci d'économie, on a directement traité la conjonction comportant trois membres sans se soucier de parenthésage en écrivant directement les trois membres de la conjonction les uns sous les autres. De la même façon, on a traité directement la négation de conjonction comportant trois membres en ouvrant trois branches au lieu de deux. Toujours par souci d'économie, on a traité l'existentielle (première ligne) avant la négation de conjonction (deuxième ligne), ce qui est très mal, mais n'a pas d'importance ici...

On a fermé la branche du milieu puisque la dernière formule de cette branche est la négation de l'avant dernière formule du "tronc". La seule chose amusante se situe sur les branches de droite : la présence de $b = a$ sur cette branche permet de substituer a à b dans la formule, un peu plus haut : $\sim Qb$; on obtient ainsi $\sim Qa$ qui contredit Qa qui se trouve sur le "tronc". Remarquons que l'on aurait pu substituer b à a dans Qa , obtenant ainsi Qb , ce qui contredit $\sim Qb$. Même remarque pour des substitutions dans Pa ou Pb .

Annexe A

Quelques notions élémentaires de théorie des ensembles

A.1 Ensemble des parties d'un ensemble.

Définition : A et B étant deux ensembles, A est un sous-ensemble de B (ce que l'on note $A \subseteq B$) ssi tous les éléments de A sont éléments de B ; cela peut s'écrire dans notre langage du 1er ordre, en notant comme d'habitude "être un élément de" ou "appartient à" par " \in " : $A \subseteq B$ ssi $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Un axiome de la théorie des ensembles pose qu'étant donné un ensemble A quelconque, il existe un autre ensemble qui a pour éléments tous les sous-ensembles de A . On appelle cet ensemble, l'ensemble des parties de A (ou l'ensemble des sous-ensembles de A), et on le note : $\wp(A)$.

Exemple : soit $A = \{a, b, c\}$; alors :

$$\wp(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Remarques :

- " \emptyset " désigne l'ensemble vide, c'est à dire l'ensemble auquel rien n'appartient. Cet ensemble est unique et est inclus dans tous les ensembles (l'antécédent de l'implication ci-dessus est toujours faux et donc l'implication est toujours vraie).

- Un ensemble est toujours inclus dans lui-même (trivialement, tous les éléments de A sont éléments de A).
- Un élément a est différent de l'ensemble dont il est le seul élément (appelé "singleton a " et noté $\{a\}$), i.e. $a \neq \{a\}$.
- Un élément d'un ensemble A n'est pas élément de $\wp(A)$.
- Les éléments de $\wp(A)$ sont eux-mêmes des ensembles : $\wp(A)$ est un ensemble d'ensembles.
- Si A compte n éléments, $\wp(A)$ en compte 2^n .

A.2 Produit cartésien

Définition : le produit cartésien de deux ensembles A et B (noté $A \times B$) est l'ensemble de toutes les paires ordonnées dont la première projection est un élément de A et la seconde, un élément de B .

Exemple : soit $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2\}$; alors :

$$A \times B = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle \}.$$

Remarques :

- les éléments de $A \times B$ sont les six paires $\langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \dots$; par contre $a, b, c, 1$ et 2 , ne sont pas des éléments de $A \times B$.
- les paires $\langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \dots$ sont *ordonnées*, ce qui signifie que l'on ne peut confondre, par ex., $\langle a, 1 \rangle$ avec $\langle 1, a \rangle$; il en résulte que si les deux ensembles A et B sont différents (comme c'est le cas ici), les deux produits cartésiens $A \times B$ et $B \times A$ sont différents (même s'ils ont le même "nombre" d'éléments).

De ce qui précède, il suit que le produit cartésien d'un ensemble A par lui-même, $A \times A$ (noté aussi A^2) est l'ensemble de toutes les paires ordonnées d'éléments de A . Exemple, avec A comme ci-dessus :

$A \times A = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, c \rangle \}$.

En général, on peut “multiplier” un ensemble par lui-même autant que l’on veut, de sorte que l’on peut l’élever à la puissance 3, à la puissance 4, etc. : A^3 est l’ensemble de tous les triplets d’éléments de A , A^4 , l’ensemble de tous les quadruplets d’éléments de A , etc.

En général, A^n est l’ensemble des n -uplets d’éléments de A . Dans tous les cas, l’ordre des éléments dans un n -uplet est essentiel : par ex., le quintuplet $\langle a, a, c, b, a \rangle$ est différent du quintuplet $\langle a, c, a, b, a \rangle$ puisque l’ordre entre les éléments n’est pas le même.

Puisque A^2 , par exemple, est un ensemble, on peut former l’ensemble des parties de A^2 , $\wp(A^2)$, qui est donc l’ensemble des sous-ensembles de l’ensemble des paires ordonnées d’éléments de A . En reprenant l’exemple ci-dessus,

$\wp(A^2) = \{ \emptyset, \{ \langle a, a \rangle \}, \{ \langle a, b \rangle \}, \dots, \{ \langle c, c \rangle \}, \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle \}, \dots, \{ \langle c, a \rangle, \langle c, b \rangle \}, \dots, \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, c \rangle \}$.

$\wp(A^2)$ comporte 2^9 éléments c.a.d. 512 éléments!! On ne peut donc l’écrire aisément...

De manière générale, étant donné un ensemble A , on peut former sa n -ième puissance A^n puis former l’ensemble $\wp(A^n)$ de ses parties. Comme on le voit, le nombre d’éléments de $\wp(A^n)$ croît extrêmement vite en fonction de n .

Attention à ne pas confondre sous-ensemble d’un ensemble A et n -uplet d’éléments de A !! En effet :

- dans un n -uplet un même élément peut figurer plusieurs fois, ce qui n’est pas le cas d’un sous-ensemble (ou d’un ensemble en général).
- un ensemble est entièrement défini par la donnée de ses éléments quel que soit l’ordre dans lesquels on les prend, ce qui n’est pas le cas d’un n -uplet.

A.3 Fonction

Définition : une fonction f d’un ensemble A dans un ensemble B (ce que l’on note : $f : A \rightarrow B$), est une relation entre A et B qui a les deux propriétés suivantes :

- à tout élément de A correspond, par f , au moins un élément de B
- à tout élément de A correspond, par f , au plus un élément de B

Si x est un élément de A , on note $f(x)$ l'élément unique de B qui correspond à x par f . On appelle cet élément unique (i.e. $f(x)$) l'image de x par f .

On appelle A , l'ensemble de départ et B , l'ensemble d'arrivée de la fonction.

Selon la définition précédente, rien n'interdit que deux éléments distincts de A aient la même image par f , autrement dit que l'on ait : $x \in A$, $y \in A$, $x \neq y$ et $f(x) = f(y)$. Rien n'interdit non plus qu'il y ait des éléments de B qui ne soient pas images par f d'un élément de A , autrement dit qu'il existe $y \in B$, tel que pour tout $x \in A$, $y \neq f(x)$.

Si, en revanche, deux éléments distincts de A n'ont jamais la même image par f , on dit que f est *injective* ; autrement dit :

$$f : A \rightarrow B \text{ est injective ssi } \forall x, \forall y \{ (x \in A \wedge y \in A \wedge x \neq y) \Rightarrow f(x) \neq f(y) \}$$

De la même manière, si tout élément de B est image par f d'un élément de A , on dit que f est *surjective* ; autrement dit :

$$f : A \rightarrow B \text{ est surjective ssi } \forall y \{ y \in B \Rightarrow \exists x (x \in A \wedge y = f(x)) \}.$$

Une fonction qui est à la fois injective et surjective est dite *bijective*. Il est facile de voir que si $f : A \rightarrow B$ est bijective alors à chaque élément de A correspond un et un seul élément de B (puisque f est une fonction) et réciproquement, à chaque élément de B (f surjective) correspond un et un seul élément de A (f injective) ; en ce cas, les deux ensembles A et B ont même "cardinal" (i.e. le même "nombre" d'éléments s'il s'agit d'ensembles finis) et il existe une fonction inverse, notée f^{-1} , de B dans A , qui fait correspondre à chaque élément de B l'élément de A dont il est l'image par f .

Annexe B

Pourquoi et comment fermer un arbre rapidement ?

La méthode des arbres en premier ordre n'est pas d'un usage aussi facile et "mécanique" qu'en propositionnel car la règle pour les universelles impose que l'on "récapitule" les constantes déjà introduites avec la règle pour les existentielles. Cela peut conduire, si l'on applique "aveuglément" les règles dans l'ordre canonique (connecteurs puis existentielles puis universelles) à des arbres pratiquement infaisables car beaucoup trop exubérants. Il convient donc de faire preuve de sagacité et, comme Plick et Plock finirent par le comprendre, de "réfléchir avant d'agir" !

B.1 Transitivité + symétrie implique réflexivité (simple)

A titre d'exemple, on va considérer l'arbre pour la formule correspondant à la loi selon laquelle si une relation est transitive et symétrique alors elle est (simplement) réflexive.

La formule en question est la suivante :

$$\{\forall x, \forall y, \forall z[(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz] \wedge \forall x, \forall y(Rxy \Rightarrow Ryx)\} \Rightarrow \forall x, \forall y(Rxy \Rightarrow Rxx)$$

Commençons l'arbre pour cette formule ; cela donne :

78ANNEXE B. POURQUOI ET COMMENT FERMER UN ARBRE RAPIDEMENT ?

$$\begin{array}{c}
 \sim \{ \{ \forall x, \forall y, \forall z [(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz] \wedge \forall x, \forall y (Rxy \Rightarrow Ryx) \} \Rightarrow \forall x, \forall y (Rxy \Rightarrow Rxx) \} \\
 | \\
 \forall x, \forall y, \forall z [(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz] \wedge \forall x, \forall y (Rxy \Rightarrow Ryx) \\
 | \\
 \sim \forall x, \forall y (Rxy \Rightarrow Rxx) \\
 | \\
 \forall x, \forall y, \forall z [(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz] \\
 | \\
 \forall x, \forall y (Rxy \Rightarrow Ryx) \\
 | \\
 \sim (Rab \Rightarrow Raa) \\
 | \\
 Rab \\
 | \\
 \sim Raa
 \end{array}$$

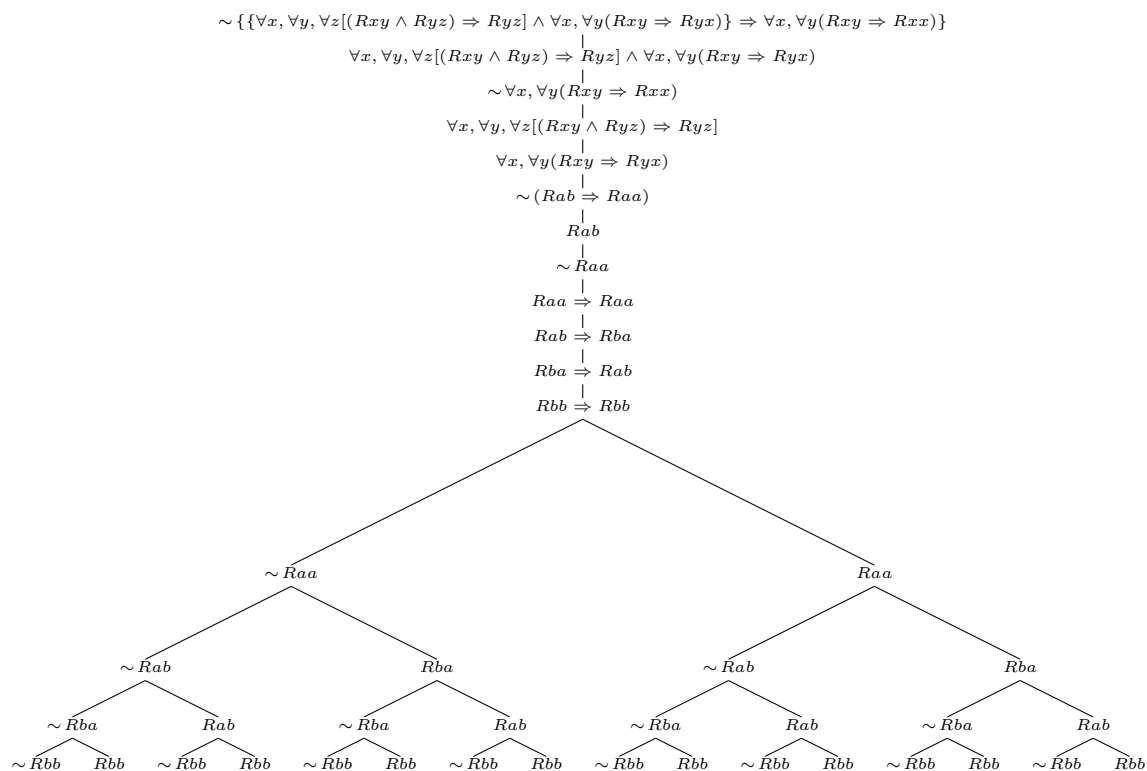
On a donc introduit deux constantes a et b . Il reste maintenant à traiter les deux universelles correspondant à la transitivité et à la symétrie. Considérons la formule de la symétrie. Il est facile de voir que l'on peut interpréter les deux variables quantifiées universellement de quatre manières différentes, à savoir :

1	2	3	4
$x \rightarrow a$	$x \rightarrow a$	$x \rightarrow b$	$x \rightarrow b$
$y \rightarrow a$	$y \rightarrow b$	$y \rightarrow a$	$x \rightarrow b$

Il faut donc, si l'on suit à la lettre la règle pour les universelles, traiter quatre fois la formule de la symétrie et écrire à la suite du début de l'arbre ci-dessus les quatre formules :

$$\begin{array}{l}
 Raa \Rightarrow Raa \\
 Rab \Rightarrow Rba \\
 Rba \Rightarrow Rab \\
 Rbb \Rightarrow Rbb
 \end{array}$$

Chacune de ces formules étant une implication donne lieu à une bifurcation, ce qui est encore faisable et donne le début d'arbre suivant, dans le prolongement du précédent :



On voit que cet arbre commence à devenir passablement touffu : il a maintenant $2^4 = 16$ branches. Mais ce n'est pas fini ! Il faut maintenant traiter la formule de la transitivité qui, elle, comporte trois variables quantifiées universellement ; il y a donc 2^3 interprétations possibles pour ces trois variables, à savoir :

1	2	3	4	5	6	7	8
$x \rightarrow a$	$x \rightarrow a$	$x \rightarrow a$	$x \rightarrow a$	$x \rightarrow b$	$x \rightarrow b$	$x \rightarrow b$	$x \rightarrow b$
$y \rightarrow a$	$y \rightarrow a$	$y \rightarrow b$	$y \rightarrow b$	$y \rightarrow a$	$y \rightarrow a$	$y \rightarrow b$	$y \rightarrow b$
$z \rightarrow a$	$z \rightarrow b$	$z \rightarrow a$	$z \rightarrow b$	$z \rightarrow a$	$z \rightarrow b$	$z \rightarrow a$	$z \rightarrow b$

Il faudrait donc écrire, à l'extrémité de chacune des seize branches déjà obtenues ci-dessus, les huit formules correspondant à ces huit interprétations possibles des trois variables x, y et z ; c'est à dire les huit formules :

$$\begin{array}{l}
 (Raa \wedge Raa) \Rightarrow Raa \\
 (Raa \wedge Rab) \Rightarrow Rab \\
 (Rab \wedge Rba) \Rightarrow Raa \\
 (Rab \wedge Rbb) \Rightarrow Rab
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
(Rba \wedge Raa) &\Rightarrow Rba \\
(Rba \wedge Rab) &\Rightarrow Rbb \\
(Rbb \wedge Rba) &\Rightarrow Rba \\
(Rbb \wedge Rbb) &\Rightarrow Rbb
\end{aligned}$$

Le traitement de chacune de ces formules donnera lieu à trois branches nouvelles, puisque l'on a, par ex. pour l'interprétation 3 :

$$\begin{array}{c}
(Rab \wedge Rba) \Rightarrow Raa \\
\swarrow \quad \searrow \\
\sim(Rab \wedge Rba) \quad Raa \\
\swarrow \quad \searrow \\
\sim Rab \quad \sim Rba
\end{array}$$

Et comme il y a huit formules de même forme à traiter à l'extrémité de chacune des seize branches ci-dessus, il y aura donc 3^8 , c'est à dire 6561, branches nouvelles dans le prolongement de chacune de ces seize branches, et donc l'arbre complet comportera, au total, $16 \times 6561 = 104\,976$ branches. On voit qu'il est en pratique impossible de compléter un tel arbre.

Pour contourner cette difficulté pratique (mais pas logique!), il faut tout d'abord se souvenir que si, avant qu'un arbre soit complété, toutes ses branches sont fermées, l'arbre complet aurait également été fermé. Autrement dit, par principe, un arbre qui ferme alors que certaines formules n'ont pas encore été traitées, aurait *a fortiori* fermé si elles l'avaient été. Il s'agit donc d'essayer de déterminer à l'avance quelles sont les interprétations (s'il en existe) des variables quantifiées universellement qui conduiront à une fermeture rapide. Et pour cela il faut RE-FLE-CHIR (juste un petit peu)!

Dans l'exemple que l'on a pris, l'arbre pour la formule ne fait que mettre en forme la question suivante : est-il possible qu'une relation **R** transitive et symétrique ne soit pas (simplement) réflexive? Le début de l'arbre donné ci-dessus peut se lire de la manière suivante : si l'on suppose que **R** n'est pas (simplement) réflexive, c'est qu'il existe un domaine comportant au moins deux éléments, disons *a* et *b*, tels que *a* est dans la relation **R** à *b* et *a* n'est pas dans la relation **R** avec lui-même. C'est ce qu'expriment les deux dernières formules de ce début d'arbre : *Rab* et $\sim Raa$.

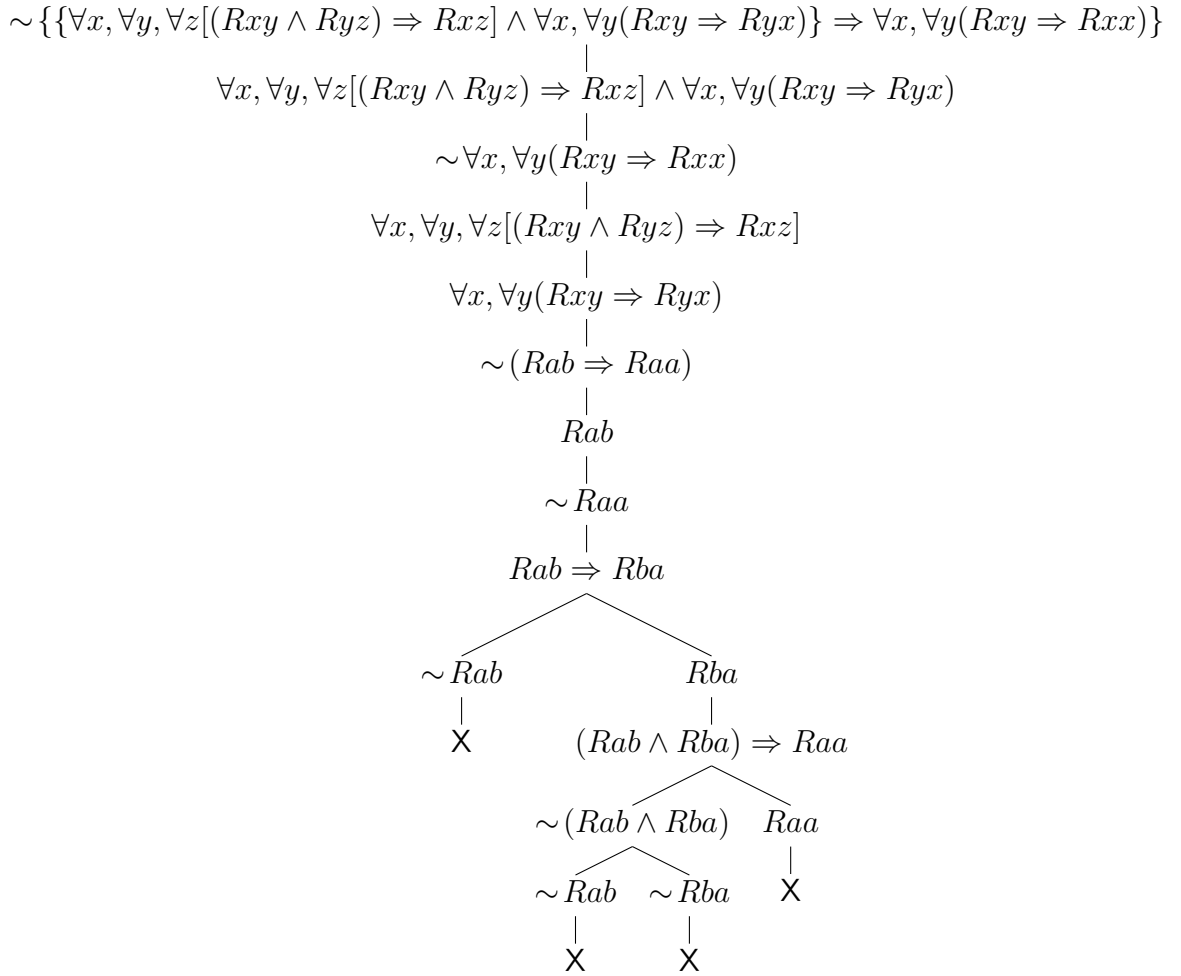
Il s'agit maintenant de savoir si, étant admis que l'on a *Rab*, il ne suit pas de la transitivité et de la symétrie de **R** que l'on doit avoir aussi *Raa*, ce qui contredirait la supposition précédente : $\sim Raa$.

On va voir que c'est bien le cas. En effet, puisque \mathbf{R} est symétrique et que l'on a Rab , il s'ensuit que l'on a également Rba . Mais comme \mathbf{R} est transitive et que l'on a Rab et Rba , on a nécessairement Raa . Il n'est donc pas possible de supposer $\sim Raa$; autrement dit, la supposition que \mathbf{R} n'est pas (simplement) réflexive est contradictoire avec le fait que \mathbf{R} est transitive et symétrique.

On voit alors que pour fermer l'arbre rapidement, il faut choisir comme interprétation de x et de y dans la formule exprimant la symétrie, a et b respectivement, ce qui correspond donc à la deuxième des quatre interprétations possibles indiquées ci-dessus.

Pour ce qui est de la formule exprimant la transitivité, il faut choisir comme interprétations de x , y , et z , a , b et a , respectivement, ce qui correspond à la troisième des huit interprétations possibles indiquées ci-dessus.

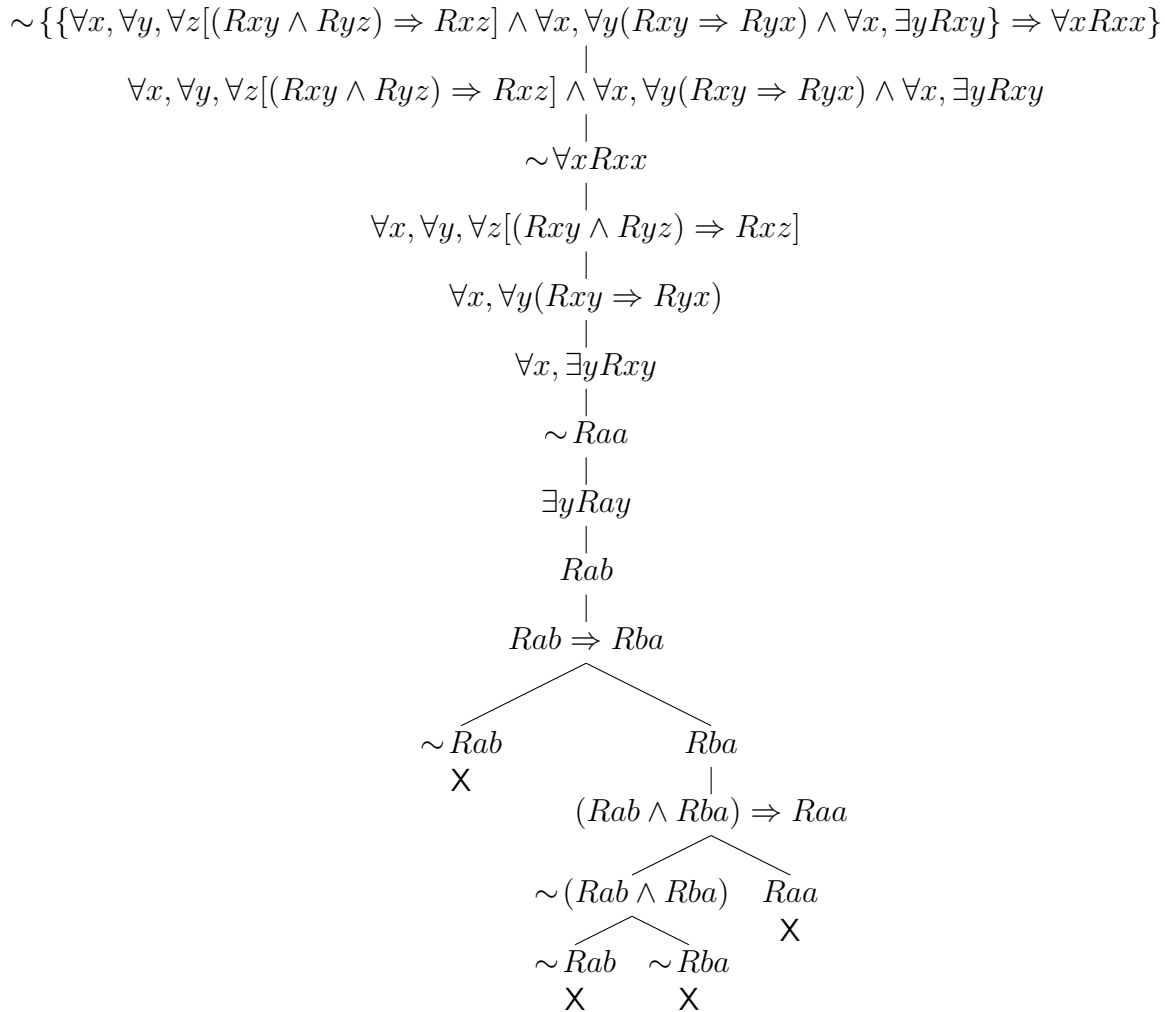
On va voir qu'avec ces choix d'interprétation, l'arbre ferme très rapidement.



On a donc fait l'économie de la construction de 104 972 branches ! Il est aisé sur cet exemple de justifier le principe qu' "un arbre qui ferme alors que certaines formules n'ont pas encore été traitées, aurait *a fortiori* fermé si elles l'avaient été". En effet l'ordre dans lequel on a fait, ci-dessus, les listes des interprétations possibles des variables quantifiées universellement, est logiquement indifférent et rien n'impose donc d'écrire les formules correspondantes dans l'ordre que l'on a adopté. Supposons que "par hasard" on choisisse les interprétations 2 pour la symétrie et 3 pour la transitivité. On aboutirait à l'arbre ci-dessus. Si maintenant on s'avisait de traiter les formules correspondant aux autres interprétations, on ne ferait que prolonger les quatre branches de cet arbre, et comme ces quatre branches sont déjà fermées, les 104 972 suivantes le seraient également.

B.2 Transitivité + symétrie + sérialité implique réflexivité totale

Dans le cas précédent, on remarque qu'il suffit que dans le domaine se trouvent deux éléments entretenant la relation **R**, pour que l'on puisse faire jouer la symétrie puis la transitivité de **R**. C'est cette circonstance que l'on est amené à admettre lorsque l'on suppose que la négation de la formule exprimant la réflexivité simple est vraie. Une condition plus forte est que tout élément du domaine entretienne la relation **R** avec au moins un élément du domaine, ce qu'exprime la formule pour la sérialité et qui permet alors d'en tirer que **R** est totalement réflexive. On laisse au lecteur le soin de faire les rapprochements pertinents avec l'arbre qui précède.



B.3 Euclidien + réflexivité (totale) implique symétrie

On va considérer rapidement ci-dessous un autre exemple, à savoir la loi selon laquelle si une relation est euclidienne et (totalement) réflexive alors elle est symétrique, ce qui s'exprime par la formule suivante :

$$\{\forall x, \forall y, \forall z[(Rxy \wedge Rxz) \Rightarrow Ryz] \wedge \forall x Rxx\} \Rightarrow \forall x, \forall y(Rxy \Rightarrow Ryx)$$

Début de l'arbre pour cette formule :

$$\begin{array}{c} \sim \{\{\forall x, \forall y, \forall z[(Rxy \wedge Rxz) \Rightarrow Ryz] \wedge \forall x Rxx\} \Rightarrow \forall x, \forall y(Rxy \Rightarrow Ryx)\} \\ | \\ \forall x, \forall y, \forall z[(Rxy \wedge Rxz) \Rightarrow Ryz] \wedge \forall x Rxx \\ | \\ \sim \forall x, \forall y(Rxy \Rightarrow Ryx) \\ | \\ \forall x, \forall y, \forall z[(Rxy \wedge Rxz) \Rightarrow Ryz] \\ | \\ \forall x Rxx \\ | \\ \sim (Rab \Rightarrow Rba) \\ | \\ Rab \\ | \\ \sim Rba \end{array}$$

On suppose donc que dans un domaine $D = \{a, b\}$, l'élément a entretient la relation \mathbf{R} avec l'élément b , mais que b n'entretient pas la relation \mathbf{R} avec a .

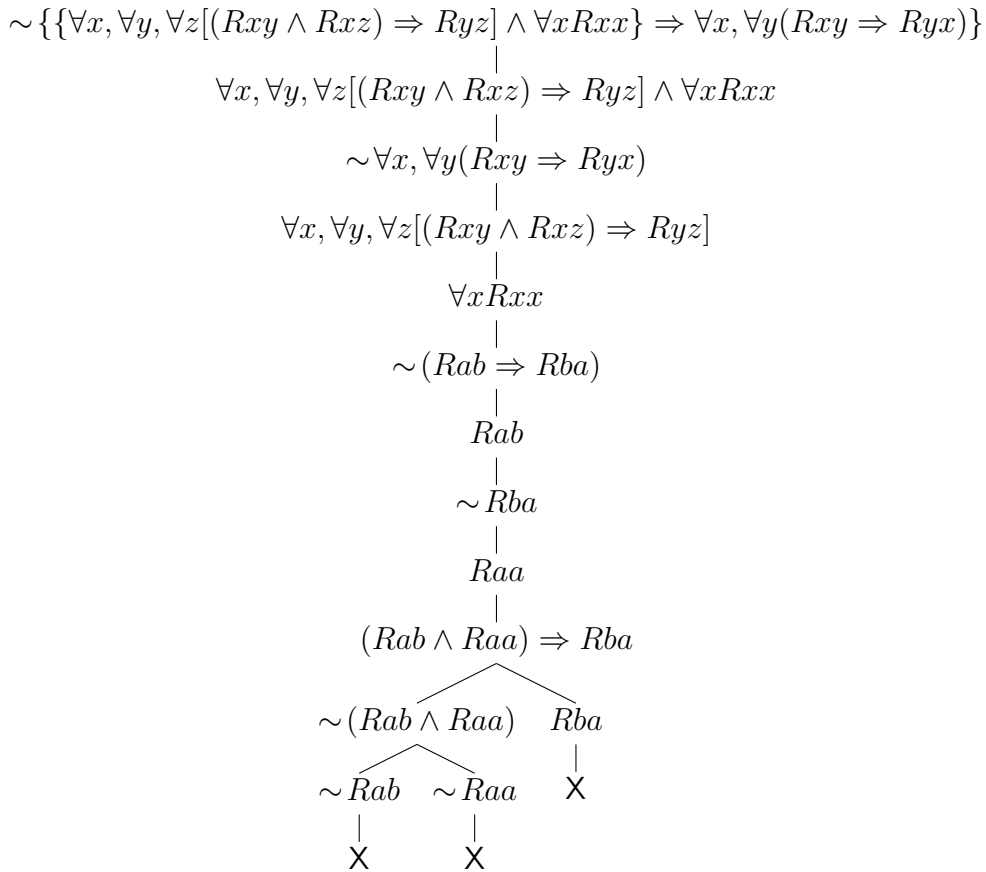
Le traitement "à l'aveugle" des deux universelles, $\forall x, \forall y, \forall z[(Rxy \wedge Rxz) \Rightarrow Ryz]$ et $\forall x Rxx$, conduirait donc à traiter deux fois la formule exprimant la réflexivité : Raa et Rbb . Cela, par fortune, ne conduirait à aucune branche nouvelle. Par contre, comme on l'a vu plus haut, le traitement de la formule exprimant l'euclidiannité de \mathbf{R} devrait être traitée huit fois puisqu'elle comporte trois variables quantifiées universellement ; et comme chacune de ces formules donne lieu à trois branches, l'arbre complet aurait 6561 branches, ce qui est moins que précédemment, certes, mais reste tout autant impraticable ! Il faut donc réfléchir un peu.

Le fait que l'on ait Rab mais pas Rba est-il compatible avec le fait que \mathbf{R} est euclidienne et (totalement) réflexive, autrement dit, avec le fait que \mathbf{R} est euclidienne

et que l'on a Raa et Rbb ?

Comme on le voit, seul le fait que \mathbf{R} soit euclidienne peut permettre de conclure que étant donné Rab , on a nécessairement Rba ; il faut donc voir si l'on peut avoir Rba dans le conséquent de l'implication dans la formule $\forall x, \forall y, \forall z[(Rxy \wedge Rxz) \Rightarrow Ryz]$, et donc si l'on peut interpréter y et z par b et a respectivement de telle sorte que les deux formules de l'antécédent soient vraies dans D , autrement dit, soient deux des trois formules Rab , Raa ou Rbb . Il est aisé de voir qu'en interprétant x par a , on a ce que l'on veut, à savoir Rab et Raa .

Pour fermer rapidement l'arbre pour notre formule, il faut donc interpréter x par a , y par b , et z par a . Ce que l'on vérifie immédiatement :



On a donc fait l'économie de 6558 branches !

B.4 Exemple d'inférence asylogistique

Un exemple célèbre d'inférence intuitivement parfaitement valide, mais qui ne peut être justifiée dans le cadre de la syllogistique traditionnelle, est le raisonnement *a recto ad obliquum* avancé par Jungius et repris par Leibniz (*Nouveau Essais*, Livre IV, chap. 17, §4), puis plus tard par de Morgan ; en voici quelques illustrations :

tout cercle est une figure
ergo : tous ceux qui tracent des cercles, tracent des figures.

ou bien (Leibniz) :

Jésus Christ est Dieu
ergo : la mère de Jésus Christ est la mère de Dieu.

ou bien encore (de Morgan) :

tout homme est un animal
ergo : toute tête d'homme est une tête d'animal.

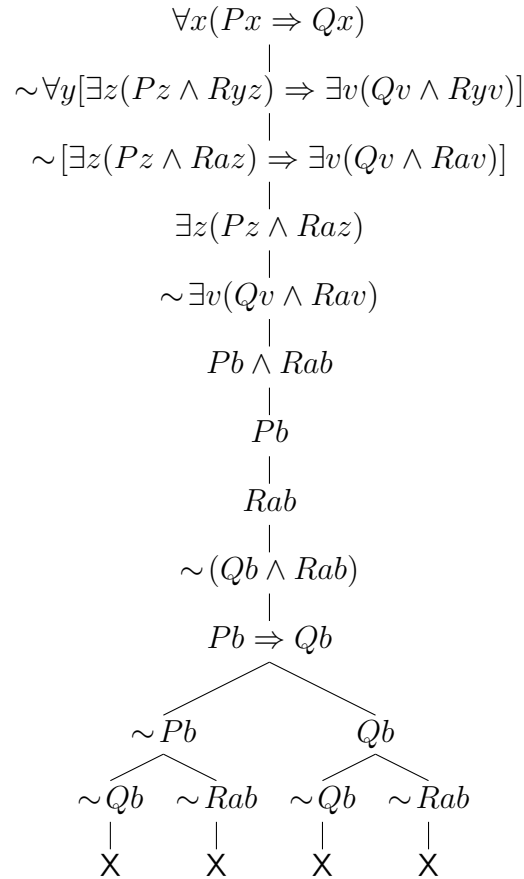
Cette inférence se formalise ainsi¹ :

$$\frac{\forall x(Px \Rightarrow Qx)}{\forall y[\exists z(Pz \wedge Ryz) \Rightarrow \exists v(Qv \wedge Ryv)]}$$

On peut lire la conclusion de la manière suivante : pour tout y , s'il existe un homme, z , et que y est la tête de z , alors il existe un animal, v , et y est la tête de v . On admettra volontiers que cette phrase a une valeur littéraire proche du zéro absolu, mais c'est la rançon à payer pour s'exprimer de manière logiquement transparente. . .

On va voir comment montrer la validité de cette formule par la méthode des arbres.

1. Rappelons que pour beaucoup de logiciens classiques, dont Leibniz, un jugement singulier est assimilé à un jugement universel. Un autre exemple de raisonnement asylogistique est : *si Jules est père de Pierre, alors Pierre est fils de Jules*, qui repose sur le fait que "être fils de" est la converse de "être père de".



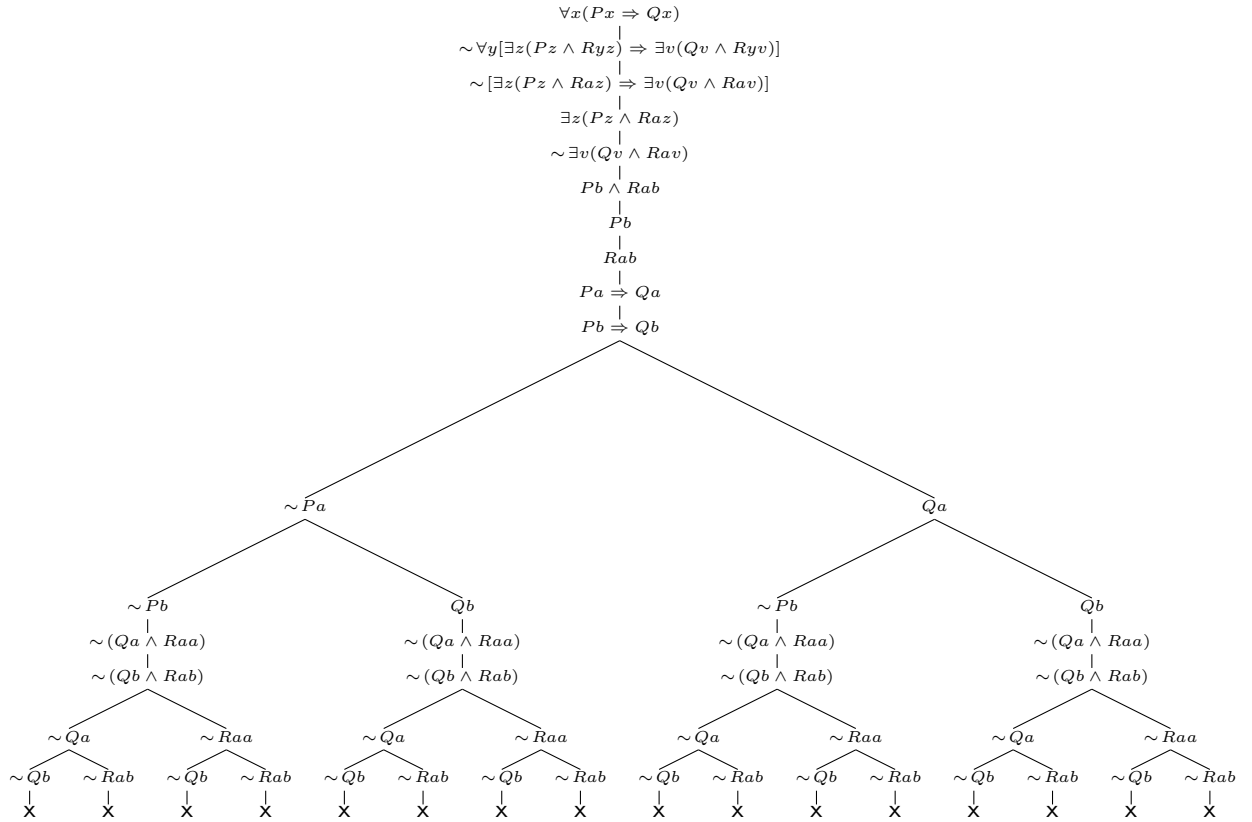
Pour comprendre comment on a choisi les constantes, il suffit de revenir sur la signification intuitive de cette formule : le traitement de l'existentielle, $\exists z(Pz \wedge Raz)$ conduit aux deux formules Pb et Rab qui peuvent s'interpréter par " b est un homme" et " a est la tête de b ". La négation d'existentielle, $\sim \exists v(Qv \wedge Rav)$, dit alors : "il n'existe pas de v qui soit un animal et dont a est la tête. Si l'on veut aboutir à une contradiction, il convient donc de choisir la constante b pour interpréter v , ce qui reviendra à : " b n'est pas un animal ou a n'est pas la tête de b ". Or puisque l'on sait déjà que a est la tête de b , cela ne peut être vrai que si b n'est pas un animal. Mais on a posé que b est un homme ; se peut-il alors qu'il ne soit pas un animal ? Sûrement pas, puisque la prémisse affirme que tout homme est un animal, et donc, en particulier, que b est un animal ; d'où contradiction.

On peut remarquer cependant que dans le cas présent, il est humainement possible de compléter l'arbre puisque le traitement de la prémisse ne conduit qu'aux deux formules : $Pa \Rightarrow Qa$ et $Pb \Rightarrow Qb$. Le traitement de chacune de ces formules conduit

88ANNEXE B. POURQUOI ET COMMENT FERMER UN ARBRE RAPIDEMENT ?

à une bifurcation et donc à quatre branches.

De même le traitement de $\sim \exists v(Qv \wedge Rav)$ ne conduit qu'aux deux formules : $\sim(Qa \wedge Raa)$ et $\sim(Qb \wedge Rab)$ et le traitement de chacune de ces formules conduit à une bifurcation, ce qui fait là encore quatre branches à l'extrémité des quatre branches précédentes. Au total, on n'aura donc que 16 branches, ce qui reste modeste ! L'arbre complet est donc :



Annexe C

Formules infini satisfiables

Outre la formule \mathfrak{F} , et celle qui "exprime" qu'un ordre total est dense (cf. p. 46 et 66, respectivement), il existe d'autres formules qui ne sont qu'infini satisfiables. On en examine trois dans cet appendice, les formules \mathfrak{D} , \mathfrak{G} et \mathfrak{H} ¹.

C.1 La formule, \mathfrak{D} , de Dedekind

Pour caractériser un ensemble infini, Dedekind pose la conjonction, \mathfrak{D} des quatre formules suivantes (avec égalité) :

$$\mathfrak{D} : \underbrace{\exists x, \forall y \sim Ryx}_{(1)} \wedge \underbrace{\forall x, \exists y Rxy}_{(2)} \wedge \underbrace{\forall x, y, z [(Rxy \wedge Rxz) \Rightarrow y = z]}_{(3)} \wedge \underbrace{\forall x, y, z [(Rxz \wedge Ryz) \Rightarrow x = y]}_{(4)}$$

La première formule « dit » qu'il y a dans le domaine au moins un élément avec lequel aucun élément du domaine n'entretient la relation \mathbf{R} ; la deuxième « dit » que tout élément du domaine entretient la relation \mathbf{R} avec au moins un élément et la troisième « dit » que cet élément est unique ; enfin la quatrième « dit » qu'il n'y a qu'un unique élément qui entretient la relation \mathbf{R} avec un élément. On aura reconnu dans la troisième formule, la formule « exprimant » qu'une relation est « de plusieurs à un », et dans la quatrième, celle « exprimant » qu'une relation est

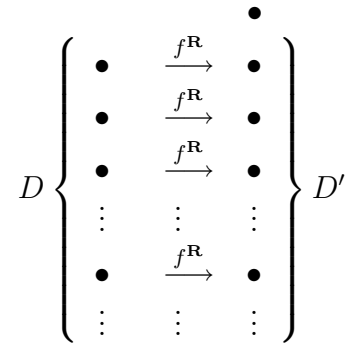
1. Convention d'écriture pour ce qui suit : on notera $\mathbf{R}\alpha\beta$ ce qui devrait s'écrire officiellement : $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbf{R}$, et $\overline{\mathbf{R}\alpha\beta}$ ce qui devrait s'écrire officiellement : $\langle \alpha, \beta \rangle \notin \mathbf{R}$, α et β étant des constantes quelconques nommant des éléments d'un domaine D .

\mathfrak{D} est de D gothique, \mathfrak{G} , le S gothique et \mathfrak{H} , le H gothique.

« de un à plusieurs ». Leur conjonction « exprime » donc que la relation \mathbf{R} est un-un.

Si maintenant on considère les formules (2) et (3), leur conjonction « dit » que \mathbf{R} est « fonctionnelle » puisque, par (2) tous les éléments du domaine entretiennent la relation \mathbf{R} avec un élément du domaine et que par (3) cet élément est unique. On peut donc transcrire ce que disent ces deux formules par : il existe une fonction, disons $f^{\mathbf{R}}$, de D dans D . Si l'on ajoute maintenant la formule (4), cette fonction est injective et est donc bijective entre D et le sous-ensemble $D' \subset D$ des images des éléments de D par $f^{\mathbf{R}}$ (autrement dit $D' = f^{\mathbf{R}}[D]$) ; qu'il s'agisse d'un sous-ensemble propre de D ($D' \subset D$), découle de la formule (1) qui implique qu'il y a au moins un élément de D qui n'est pas image par $f^{\mathbf{R}}$ d'un élément de D .

On peut figurer les choses ainsi (pour simplifier, on admet, pour la formule (1), qu'il n'y a qu'un seul élément de D qui n'est image par $f^{\mathbf{R}}$ d'aucun élément de D) :



Si l'on prend pour domaine les entiers positifs ou nul et que l'on interprète Rxy par « x précède immédiatement y » (ou bien « y est le successeur immédiat de x »), les quatre conjoints de cette formule se traduisent par :

- (1) Il existe un nombre qui n'est pas un successeur (i.e. 0).
- (2) Sérialité : tout nombre a un successeur.
- (3) Tout nombre n'a qu'un successeur.
- (4) Tout nombre, s'il a un prédécesseur, n'en a qu'un.

On peut exprimer cela de la manière suivante, en utilisant le symbole de fonction « \mathfrak{s} » pour la fonction successeur (i.e. : $\mathfrak{s}(x) = y$ se lit : y est le successeur de x).

$$\underbrace{\exists x, \forall y[\mathfrak{s}(y) \neq x]}_{(1)} \wedge \underbrace{\forall x, \exists y[\mathfrak{s}(x) = y]}_{(2)} \wedge \underbrace{\forall x, y, z[(\mathfrak{s}(x) = y \wedge \mathfrak{s}(x) = z) \Rightarrow y = z]}_{(3)} \wedge \underbrace{\forall x, y, z[(\mathfrak{s}(x) = z \wedge \mathfrak{s}(y) = z) \Rightarrow x = y]}_{(4)}$$

De manière générale, cette formule dit que s'il y a une relation un-un (formules (2), (3) et (4)) entre un ensemble (dans l'exemple précédent, celui des entiers positifs ou nuls, \mathbb{N}) et un de ses sous-ensembles propres (formule (1), l'ensemble des entiers positifs, $\mathbb{N}^+ : \mathbb{N}^+ \subset \mathbb{N}$ dans l'exemple), cet ensemble est infini.

On va donc montrer ci-dessous qu'en général, un ensemble qui peut être mis en bijection avec l'un de ses sous-ensembles propres, est infini, ce qui est la définition de Bolzano-Dedekind de « ensemble de cardinal infini » (à l'inverse, un ensemble E est de cardinal fini ssi il n'existe pas de sous-ensemble propre de E pouvant être mis en bijection avec E). Ce qui revient à montrer que \mathfrak{D} n'est satisfiable que dans un domaine infini.

On commence par la première formule et on appelle a l'élément dont elle affirme l'existence.

A. Par (2), il existe donc un élément b tel que $\mathbf{R}ab$. Ce pourrait-il que $b = a$?
Non, car on aurait alors $\mathbf{R}aa$, ce qui contredit (1).

Donc, il faut introduire un nouvel élément b , avec : $\boxed{b \neq a}$ et $\boxed{\mathbf{R}ab}$. Ce que l'on peut figurer ainsi : $a \xrightarrow{R} b$

B. Par (2) il existe un élément c tel que $\mathbf{R}bc$. Ce pourrait-il que $c = a$? que $c = b$?

- **Ba** $c = a$? donc $\mathbf{R}ba$, mais cela contredit (1).
- **Bb**. $c = b$? donc $\mathbf{R}bb$. On fait alors dans (4) :

$$\begin{aligned} x &\rightarrow b \\ y &\rightarrow a \\ z &\rightarrow b \end{aligned}$$

ce qui donne : $(\mathbf{R}bb \wedge \mathbf{R}ab) \Rightarrow b = a$

Comme on a déjà admis $\mathbf{R}ab$, la supposition $\mathbf{R}bb$ conduirait donc à affirmer $b = a$ ce qui contredit ce que l'on vient d'obtenir en **A**.

Donc il faut donc introduire un nouvel élément c avec : $\boxed{c \neq a}$, $\boxed{c \neq b}$ et $\boxed{\mathbf{R}bc}$. Ce que l'on peut figurer ainsi en tenant compte de ce qui a déjà été obtenu : $a \xrightarrow{R} b \xrightarrow{R} c$

C. Par (2), il existe un élément d tel que $\mathbf{R}cd$. Ce pourrait-il que $d = a$? que $d = b$? que $d = c$?

- **Ca)** $d = a$? donc $\mathbf{R}ca$, mais cela contredit (1).
- **Cb.)** $d = b$? donc $\mathbf{R}cb$. On fait alors dans (4) :

$$\begin{aligned} x &\rightarrow c \\ y &\rightarrow a \\ z &\rightarrow b \end{aligned}$$

ce qui donne : $(Rcb \wedge Rab) \Rightarrow c = a$

Comme on a déjà admis $\mathbf{R}ab$, la supposition $\mathbf{R}cb$ conduirait donc à affirmer $c = a$, ce qui contredit ce que l'on vient d'obtenir en **B**.

- **Cc.** $d = c$? donc $\mathbf{R}cc$. On fait alors dans (4) :

$$\begin{aligned} x &\rightarrow c \\ y &\rightarrow b \\ z &\rightarrow c \end{aligned}$$

ce qui donne : $(Rcc \wedge Rbc) \Rightarrow c = b$.

Comme on a déjà admis $\mathbf{R}bc$, la supposition $\mathbf{R}cc$ conduirait donc à affirmer $c = b$, ce qui contredit ce que l'on vient d'obtenir en **B**.

Il faut donc introduire un nouvel élément d , avec : $\boxed{d \neq a}$, $\boxed{d \neq b}$, $\boxed{d \neq c}$ et $\boxed{\mathbf{R}cd}$. Ce que l'on peut figurer ainsi en tenant compte de ce qui a déjà été obtenu : $a \xrightarrow{R} b \xrightarrow{R} c \xrightarrow{R} d$

D. Par (2) il existe un élément e tel que $\mathbf{R}de$. Ce pourrait-il que $e = a$? que $e = b$? que $e = c$? que $e = d$?

- **Da)** $e = a$? même chose que pour **A**, **Ba)** et **Ca)**.
- **Db.** $e = b$? donc $\mathbf{R}db$. On fait alors dans (4) :

$$\begin{aligned} x &\rightarrow d \\ y &\rightarrow a \\ z &\rightarrow b \end{aligned}$$

ce qui donne : $(Rdb \wedge Rab) \Rightarrow d = a$.

Comme on a déjà admis \mathbf{Rab} , la supposition Rdb conduirait donc à affirmer $d = a$, ce qui contredit ce que l'on vient d'obtenir en \mathbf{C} .

- **Dc.** $e = c$? donc \mathbf{Rdc} . On fait alors dans (4) :

$$\begin{aligned} x &\rightarrow d \\ y &\rightarrow b \\ z &\rightarrow c \end{aligned}$$

ce qui donne : $(Rdc \wedge Rbc) \Rightarrow d = b$.

Comme on a déjà admis \mathbf{Rbc} , la supposition \mathbf{Rdc} conduirait donc à affirmer $d = b$, ce qui contredit ce que l'on vient d'obtenir en \mathbf{C} .

- **Dd.** $e = d$? donc \mathbf{Rdd} . On fait alors dans (4) :

$$\begin{aligned} x &\rightarrow d \\ y &\rightarrow c \\ z &\rightarrow d \end{aligned}$$

ce qui donne : $(Rdd \wedge Rcd) \Rightarrow d = c$.

Comme on a déjà admis \mathbf{Rcd} , la supposition \mathbf{Rdd} conduirait donc à affirmer $d = c$, ce qui contredit ce que l'on vient d'obtenir en \mathbf{C} .

Il faut donc introduire un nouvel élément e , avec : $\boxed{e \neq a}$, $\boxed{e \neq b}$, $\boxed{e \neq c}$, $\boxed{e \neq d}$ et $\boxed{\mathbf{Rde}}$. Ce que l'on peut figurer ainsi en tenant compte de ce qui a déjà été obtenu : $a \xrightarrow{R} b \xrightarrow{R} c \xrightarrow{R} d \xrightarrow{R} e \dots\dots$

Etc. etc.... On voit donc que pour rendre \mathfrak{D} vraie dans un domaine D , il faut introduire sans fin de nouveaux éléments dans D ; \mathfrak{D} n'est donc satisfiable que dans un domaine infini.

Remarque : on aura noté que, dans ce qui précède, on n'a pas utilisé explicitement la formule (3); mais on l'a utilisé implicitement en introduisant, par (2), à chaque fois un seul élément, ce qui est bien une manière de satisfaire la formule (3).

C.2 La formule \mathfrak{G}

$$\mathfrak{G} : \overbrace{\exists x \forall y \sim Ryx}^{(1)} \wedge \overbrace{\forall x \exists y Rxy}^{(2)} \wedge \overbrace{\forall x, y, z, t [(Rxz \wedge Ryz \wedge Rtx) \Rightarrow Rty]}^{(3)}$$

Si l'on prend pour domaine les entiers positifs ou nuls et que l'on interprète Rxy par « x précède immédiatement y » (ou bien « y est le successeur immédiat de x »), les trois conjoints de cette formule se traduisent par :

- (1) Il existe un nombre qui n'est pas un successeur, i.e. 0.
- (2) Sérialité : tout nombre a un successeur.
- (3) Si deux nombres ont un même successeur et que l'un d'entre eux a un prédécesseur, l'autre a le même prédécesseur.

Il est clair que tout cela est vrai dans le domaine des entiers positifs ou nuls pour l'interprétation ci-dessus de R .

Il s'agit de montrer que cette conjonction n'est satisfiable que dans un domaine infini ; on procède comme pour la formule classique, mais on va voir que c'est sensiblement plus compliqué.

On commence par la première formule et on appelle a l'élément dont elle affirme l'existence.

A. Par (2), il existe donc un élément b tel que $\mathbf{R}ab$. Ce pourrait-il que $b = a$? Non, car on aurait alors $\mathbf{R}aa$, ce qui contredit (1).

Donc, il faut introduire un nouvel élément b , avec : $\boxed{b \neq a}$ et $\boxed{\mathbf{R}ab}$.

B. Par (2) toujours, il existe c tel que $\mathbf{R}bc$. Ce pourrait-il que $c = a$? que $c = b$?

Ba) $c = a$? donc $\mathbf{R}ba$, mais cela contredit (1).

Bb) $c = b$? donc $\mathbf{R}bb$. On fait alors dans (3) :

$$\begin{aligned} x &\rightarrow b \\ y &\rightarrow a \\ z &\rightarrow b \\ t &\rightarrow a \end{aligned}$$

ce qui donne : $(Rbb \wedge Rab \wedge Rab) \Rightarrow Raa$.

Comme on a déjà admis $\mathbf{R}ab$, la supposition $\mathbf{R}bb$ conduirait donc à affirmer $\mathbf{R}aa$, ce qui contredit (1).

Donc il faut introduire un nouvel élément c avec : $\boxed{c \neq a}$, $\boxed{c \neq b}$ et $\boxed{\mathbf{R}bc}$.

Remarque A (pour la suite) : on a donc montré que de $\mathbf{R}bb$, suit $\mathbf{R}aa$, ce qui, contredisant, (1), conduit à rejeter $\mathbf{R}bb$, donc $\boxed{\overline{\mathbf{R}bb}}$.

C. Par (2) toujours, il existe d tel que $\mathbf{R}cd$. Ce pourrait-il que $d = a$? que $d = b$? que $d = c$?

Ca) $d = a$? donc $\mathbf{R}ca$, mais cela contredit (1).

Cb) $d = b$? donc $\mathbf{R}cb$. On fait alors dans (3) :

$$\begin{aligned} x &\rightarrow c \\ y &\rightarrow a \\ z &\rightarrow b \\ t &\rightarrow b \end{aligned}$$

ce qui donne : $(Rcb \wedge Rab \wedge Rbc) \Rightarrow Rba$.

Comme on a déjà admis $\mathbf{R}ab$ et $\mathbf{R}bc$, la supposition $\mathbf{R}cb$ conduirait donc à affirmer $\mathbf{R}ba$, ce qui contredit (1).

Remarque B (pour la suite) : on a donc montré que de $\mathbf{R}cb$, suit $\mathbf{R}ba$, ce qui, contredisant, (1), conduit à rejeter $\mathbf{R}cb$, donc $\boxed{\overline{\mathbf{R}cb}}$.

Cc) $d = c$? donc $\mathbf{R}cc$. On fait alors dans (3) :

$$\begin{aligned} x &\rightarrow c \\ y &\rightarrow b \\ z &\rightarrow c \\ t &\rightarrow b \end{aligned}$$

ce qui donne : $(Rcc \wedge Rbc \wedge Rbc) \Rightarrow Rbb$.

Comme on a déjà admis $\mathbf{R}bc$, la supposition $\mathbf{R}cc$ conduirait donc à affirmer $\mathbf{R}bb$, ce qui contredit le résultat de la **Remarque A**.

Remarque C (pour la suite) : on a donc montré que de $\mathbf{R}cc$, suit $\mathbf{R}bb$, ce qui, contredisant $\boxed{\sim \mathbf{R}cb}$ (**Remarque B**) conduit à rejeter $\mathbf{R}cc$, donc $\boxed{\overline{\mathbf{R}cc}}$.

Donc il faut introduire un nouvel élément d avec : $\boxed{d \neq a}$, $\boxed{d \neq b}$, $\boxed{d \neq c}$ et $\boxed{\mathbf{R}cd}$.

D. Par (2) toujours, il existe e tel que \mathbf{Rde} . Ce pourrait-il que $e = a$? que $e = b$? que $e = c$? que $e = d$?

Da) $e = a$? donc \mathbf{Rda} , mais cela contredit (1).

Db) $e = b$? donc \mathbf{Rdb} . On fait alors dans (3) :

$$\begin{aligned}x &\rightarrow d \\y &\rightarrow a \\z &\rightarrow b \\t &\rightarrow c\end{aligned}$$

ce qui donne : $(Rdb \wedge Rab \wedge Rcd) \Rightarrow Rca$.

Comme on a déjà admis \mathbf{Rab} et \mathbf{Rcd} , la supposition \mathbf{Rdb} conduirait donc à affirmer \mathbf{Rca} , ce qui contredit (1).

Dc) $e = c$? donc \mathbf{Rdc} . On fait alors dans (3) :

$$\begin{aligned}x &\rightarrow d \\y &\rightarrow b \\z &\rightarrow c \\t &\rightarrow c\end{aligned}$$

ce qui donne : $(Rdc \wedge Rbc \wedge Rcd) \Rightarrow Rcb$.

Comme on a déjà admis \mathbf{Rbc} et \mathbf{Rcd} , la supposition \mathbf{Rdc} conduirait donc à affirmer \mathbf{Rcb} , ce qui contredit le résultat de la **Remarque B**.

Dd) $e = d$? donc \mathbf{Rdd} ,. On fait alors dans (3) :

$$\begin{aligned}x &\rightarrow d \\y &\rightarrow c \\z &\rightarrow d \\t &\rightarrow c\end{aligned}$$

ce qui donne : $(Rdd \wedge Rcd \wedge Rcd) \Rightarrow Rcc$.

Comme on a déjà admis \mathbf{Rcd} , la supposition \mathbf{Rdd} conduirait donc à affirmer \mathbf{Rcc} , ce qui contredit le résultat de la **Remarque C**.

Donc il faut introduire un nouvel élément e avec : $\boxed{e \neq a}$, $\boxed{e \neq b}$, $\boxed{e \neq c}$, $\boxed{e \neq d}$
et $\boxed{\mathbf{Rde}}$.

Etc., etc... On voit donc que pour rendre vraie \mathfrak{G} dans un domaine D , il faut introduire sans fin de nouveaux éléments dans D ; \mathfrak{G} n'est donc satisfiable que dans un domaine infini.

C.3 La formule \mathfrak{H}

On considère maintenant la conjonction suivante :

$$\mathfrak{H} : \overbrace{\forall x \sim Rxx}^{(1)} \wedge \overbrace{\forall x \exists y [Rxy \wedge \forall z (Rzx \Rightarrow Rzy)]}^{(2)}$$

Si l'on prend pour domaine les entiers et que l'on interprète Rxy par « x est strictement inférieur à y ($x < y$) », les deux conjoints de cette formule se traduisent par :

(1) Aucun nombre n'est strictement inférieur à lui-même (irréflexivité de « $<$ »).

(2) Pour tout nombre n , il existe (au moins) un nombre qui est strictement supérieur à n et tel que tout nombre strictement inférieur à n lui est strictement inférieur.

Il est clair que tout cela est vrai dans le domaine des entiers pour l'interprétation ci-dessus de R .

On montre qu'elle ne peut être satisfaite dans un domaine fini.

Soit $a \in D$ (puisque D non vide).

A. La formule (2) vaut de a ce qui donne :

$$\exists y [Ray \wedge \forall z (Rza \Rightarrow Rzy)]$$

y pourrait-il prendre a pour valeur ? Non, car on aurait à gauche de la conjonction Raa ce qui contredit (1) ($\neg \sim Raa$), donc on introduit un nouvel élément b et l'on obtient :

$$Rab \wedge \forall z (Rza \Rightarrow Rzb)]$$

On a donc \boxed{Rab} et $\forall z (Rza \Rightarrow Rzb)$. z doit donc prendre les deux valeurs a et b , d'où :

1. $Raa \Rightarrow Rab$
- et
2. $Rba \Rightarrow Rbb$

Pour 1. : l'implication est vraie, soit en vertu du fait que Raa est faux, ce qui est le cas par (1) soit en vertu du fait que Rab est vrai en vertu de \mathbf{Rab} que l'on déjà obtenu (encadré).

Pour 2. Rbb étant faux en vertu de (1), il faut que Rba soit faux également ; d'où $\overline{\mathbf{Rba}}$.

B. Comme on a introduit un nouvel élément b , il faut reprendre l'universelle (2), avec $x \rightarrow b$, d'où :

$$\exists y[Rby \wedge \forall z(Rzb \Rightarrow Rzy)]$$

y pourrait-il prendre a ou b pour valeur ? Non, car on aurait à gauche de la conjonction soit Rba rendu faux par $\overline{\mathbf{Rba}}$ (encadré), soit Rbb ce qui contredit (1) ; donc on introduit un nouvel élément c et l'on obtient :

$$Rbc \wedge \forall z(Rzb \Rightarrow Rzc)]$$

On a donc $\overline{\mathbf{Rbc}}$ et $\forall z(Rzb \Rightarrow Rzc)]$. z doit donc prendre les trois valeurs a , b et c , d'où :

1. $Rab \Rightarrow Rac$,
2. $Rbb \Rightarrow Rbc$
- et
3. $Rcb \Rightarrow Rcc$

Pour 1. : Rab étant vrai en vertu de \mathbf{Rab} (encadré), il faut que Rac soit vrai, d'où \mathbf{Rac} .

Pour 2. : pas de problème, puisque Rbc est vrai en vertu de \mathbf{Rbc} (encadré).

Pour 3. : Rcc étant faux en vertu de (1), il faut que Rcb soit faux également ; d'où $\overline{\mathbf{Rcb}}$.

Récapitulons, ce qui est acquis : $\overline{\mathbf{Rab}}, \overline{\mathbf{Rba}}, \mathbf{Rbc}, \overline{\mathbf{Rcb}}, \mathbf{Rac}$.

C. Comme on a introduit un nouvel élément c , il faut reprendre l'universelle (2) avec $x \rightarrow c$, d'où :

$$\exists y[Rcy \wedge \forall z(Rzc \Rightarrow Rzy)]$$

y pourrait-il prendre a ou b ou c pour valeur ? Pour les valeurs b et c , l'affaire est immédiate : cela donnerait, pour le conjoint de gauche, Rcb déjà admis comme faux en vertu de $\overline{\mathbf{Rcb}}$, ou bien Rcc faux en vertu de (1). Donc y ne peut prendre les valeurs b et c .

Pour la valeur a les choses sont un peu plus compliquées que précédemment.

Supposons $y \rightarrow a$, on aurait alors : $Rca \wedge \forall z(Rzc \Rightarrow Rza)$, et là Rca n'a pas déjà été admis pour faux ; mais dans le deuxième conjoint, z doit prendre, entre autres, la valeur a , ce qui donnera : $Rca \wedge (Rac \Rightarrow Raa)$ et ce deuxième conjoint est faux puisque l'on a déjà admis Rac comme vrai en vertu de \mathbf{Rac} et que Raa est faux en vertu de (1). Donc l'universelle $\forall z(Rzc \Rightarrow Rza)$ est fautive, tout comme la conjonction et y ne peut prendre la valeur a . Donc, puisque les valeurs b et c sont également exclues, on introduit un nouvel élément d et l'on obtient :

$$Rcd \wedge \forall z(Rzc \Rightarrow Rzd)]$$

On a donc $\boxed{\mathbf{Rcd}}$ et $\forall z(Rzc \Rightarrow Rzd)$. z doit donc prendre les quatre valeurs a , b , c et d , d'où :

1. $Rac \Rightarrow Rad$,
2. $Rbc \Rightarrow Rbd$
3. $Rcc \Rightarrow Rcd$
- et
4. $Rdc \Rightarrow Rdd$

Pour 1. : Rac étant vrai en vertu de \mathbf{Rac} (encadré), il faut que Rad soit vrai, d'où $\boxed{\mathbf{Rad}}$.

Pour 2. : Rbc étant vrai en vertu de \mathbf{Rbc} (encadré), il faut que Rbd soit vrai, d'où $\boxed{\mathbf{Rbd}}$.

Pour 3. : pas de problème, puisque Rcd est vrai en vertu de \mathbf{Rcd} (encadré).

Pour 4. : Rdd étant faux en vertu de (1), il faut que Rdc soit faux également ; d'où $\boxed{\overline{\mathbf{Rdc}}}$

Récapitulation : $\boxed{\mathbf{Rab}, \overline{\mathbf{Rba}}, \mathbf{Rbc}, \overline{\mathbf{Rcb}}, \mathbf{Rcd}, \overline{\mathbf{Rdc}}, \mathbf{Rac}, \mathbf{Rad}, \mathbf{Rbd}}$.

D. On fait un dernier examen (on va se contenter de montrer qu'il faut encore introduire un nouvel élément) et on reprend la formule (2) avec $x \rightarrow d$, d'où :

$$\exists y[Rdy \wedge \forall z(Rzd \Rightarrow Rzy)]$$

y pourrait-il prendre a ou b ou c ou d pour valeur ? Pour les valeurs c et d , l'affaire est immédiate : cela donnerait pour le conjoint de gauche Rdc , faux en vertu de $\overline{\mathbf{R}dc}$, ou bien Rdd faux en vertu de (1). Donc y ne peut prendre les valeurs c et d .

Pour les valeurs a et b , on suit la même démarche qu'en \mathbf{C} pour la valeur a .

Supposons $y \rightarrow a$; on aurait alors : $Rda \wedge \forall z(Rzd \Rightarrow Rza)$, et là Rda n'a pas déjà été admis comme faux ; mais dans le deuxième conjoint, z doit prendre, entre autres, la valeur a , ce qui donnera $\forall z(Rad \Rightarrow Raa)$ et ce deuxième conjoint est faux puisque Rad est vrai en vertu de $\mathbf{R}ad$ et que Raa est faux en vertu de (1). Donc l'universelle $\forall z(Rzd \Rightarrow Rza)$ est fausse, tout comme la conjonction et y ne peut prendre la valeur a .

Supposons $y \rightarrow b$; on aurait alors : $Rdb \wedge \forall z(Rzd \Rightarrow Rzb)$, et là Rdb n'a pas déjà été admis comme faux ; mais dans le deuxième conjoint, z doit prendre, entre autres, la valeur b , ce qui donnera $\forall z(Rbd \Rightarrow Rbb)$ et ce deuxième conjoint est faux puisque Rbd est vrai en vertu de $\mathbf{R}bd$ et que Rbb est faux en vertu de (1). Donc l'universelle $\forall z(Rzd \Rightarrow Rza)$ est fausse, tout comme la conjonction et y ne peut prendre la valeur b .

Donc y ne peut prendre aucune des valeurs a, b, c, d et il faut donc introduire un nouvel élément e .

Etc, etc... On voit donc que pour rendre vraie \mathfrak{H} dans un domaine D , il faut introduire sans fin de nouveaux éléments dans D ; \mathfrak{H} n'est donc satisfiable que dans un domaine infini.

C.4 Relations entre ces formules

1. De la formule classique

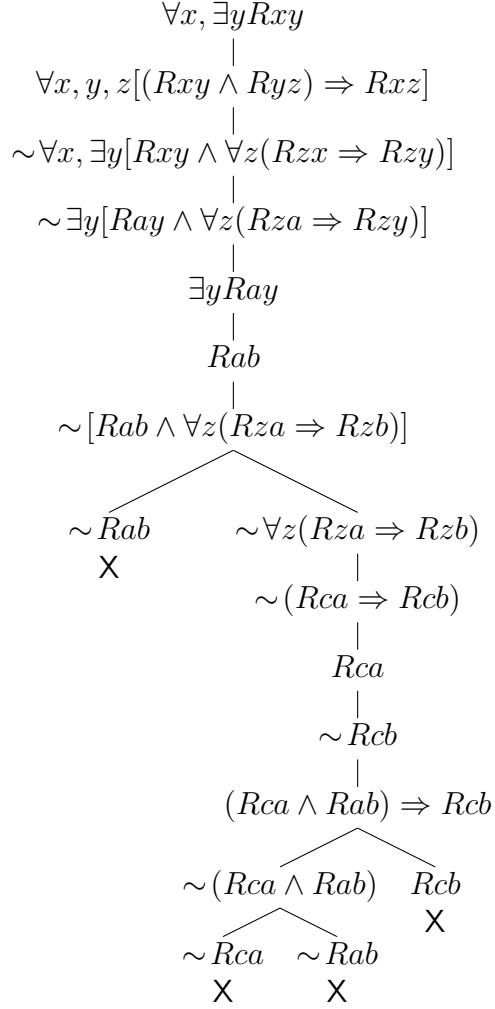
$$\mathfrak{F} : \forall x \sim Rxx \wedge \forall x, \exists y Rxy \wedge \forall x, y, z [(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz]$$

on tire

$$\mathfrak{H} : \forall x \sim Rxx \wedge \forall x \exists y [Rxy \wedge \forall z (Rzx \Rightarrow Rzy)].$$

Comme évidemment, $\forall x \sim Rxx$ se déduit d'elle-même, il suffit de montrer que de la conjonction $\forall x, \exists y Rxy \wedge \forall x, y, z [(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz]$, suit $\forall x, \exists y [Rxy \wedge \forall z (Rzx \Rightarrow Rzy)]$.

Voici l'arbre optimisé pour cette inférence :



2. De la formule de Dedekind, \mathfrak{D} , on tire la formule \mathfrak{G} :

$$\mathfrak{G} : \exists x, \forall y \sim Ryx \wedge \forall x, \exists y Rxy \wedge \forall x, y, z, t [(Rxx \wedge Ryz \wedge Rtx) \Rightarrow Rty]$$

Comme les deux premiers conjoints de \mathfrak{G} figurent également dans \mathfrak{D} , il suffit de montrer que le troisième s'ensuit également. Or ce troisième conjoint, suit de la quatrième formule de \mathfrak{D} , ce que l'on montre ainsi (en utilisant la règle LL pour l'identité) :

$$\begin{array}{c}
 \forall x, y, z[(Rxx \wedge Ryz) \Rightarrow x = y] \\
 | \\
 \sim \forall x, y, z, t[(Rxx \wedge Ryz \wedge Rtx) \Rightarrow Rty] \\
 | \\
 \sim [(Rac \wedge Rbc \wedge Rda) \Rightarrow Rdb] \\
 | \\
 Rac \wedge Rbc \wedge Rda \\
 | \\
 \sim Rdb \\
 | \\
 Rac \\
 | \\
 Rbc \\
 | \\
 Rda \\
 | \\
 (Rac \wedge Rbc) \Rightarrow a = b \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \sim (Rac \wedge Rbc) \quad a = b \\
 \swarrow \quad \searrow \quad | \\
 \sim Rac \quad \sim Rbc \quad Rdb \\
 \times \quad \times \quad \times
 \end{array}$$

En résumé : \mathfrak{H} suit de \mathfrak{F} ($\mathfrak{F} \models \mathfrak{H}$) et \mathfrak{G} suit de \mathfrak{D} ($\mathfrak{D} \models \mathfrak{G}$).

Par contre, il a été montré que \mathfrak{F} et \mathfrak{G} sont indépendantes l'une de l'autre au sens où elles ne sont pas déductibles (ou conséquences sémantiques) l'une de l'autre. De la même façon, \mathfrak{D} et \mathfrak{F} sont indépendantes l'une de l'autre.

C.5 Remarque sur le calcul des prédicats monadiques et l'infini

On aura remarqué que les formules \mathfrak{F} , \mathfrak{G} , \mathfrak{H} et \mathfrak{D} comportent toutes des lettres de prédicat à deux places, qui s'interprètent donc par des relations sur un domaine donné. Toutes ces formules permettent d'« exprimer » qu'un domaine est infini, au sens où, si elles sont vraies dans un domaine, alors ce domaine est nécessairement infini.

On pourrait se demander s'il n'existe pas de formules ne comportant que des

lettres de prédicat à une place, appartenant donc au calcul des prédicats monadiques, et dont la vérité dans un domaine impliquerait que ce domaine soit infini. La réponse est négative, ce qui permet de comprendre les embarras de la logique traditionnelle, et donc des philosophies qui en dépendent, devant la question de l'infini.

Pour comprendre cette situation, on montre que toute formule du calcul des prédicats monadiques, si elle est satisfiable, est satisfiable dans un domaine dont la cardinalité est finie ; plus précisément, on montre qu'une formule φ du calcul des prédicats monadiques, satisfiable dans un domaine quelconque, l'est également dans un domaine ne comptant pas plus de 2^k éléments, k étant le nombre de lettres de prédicats figurant dans φ . Or, comme k et donc 2^k est fini, φ est donc satisfiable dans un domaine fini.

C.5.1 Un exemple.

L'idée générale est que l'on peut construire un domaine ne comptant pas plus de 2^k éléments en « confondant » les éléments qui ont exactement les mêmes propriétés et en ré-interprétant de manière appropriée, mais évidente, les lettres de prédicat.

Avant de présenter les choses de manière générale, on va envisager un exemple simple permettant de comprendre sur un cas particulier la démarche suivie.

Soit une formule ne comptant que deux lettres de prédicat ($k = 2$), P_1, P_2 , que l'on interprète dans un domaine D comptant, disons, 10 éléments ($D = \{a_1, \dots, a_{10}\}$), par \mathbf{P}_1 et \mathbf{P}_2 (il est inutile pour l'instant de définir plus avant ces deux propriétés).

Chacun de ces dix éléments, peut avoir soit les deux propriétés \mathbf{P}_1 et \mathbf{P}_2 ($= \mathbf{P}_1/\mathbf{P}_2$), soit \mathbf{P}_1 mais pas \mathbf{P}_2 ($= \mathbf{P}_1/\overline{\mathbf{P}_2}$), soit \mathbf{P}_2 mais pas \mathbf{P}_1 ($= \overline{\mathbf{P}_1}/\mathbf{P}_2$), soit ni \mathbf{P}_1 ni \mathbf{P}_2 ($= \overline{\mathbf{P}_1}/\overline{\mathbf{P}_2}$). Il n'y a pas d'autres possibilités pour chacun de ces éléments. Comme il y en a dix, nécessairement certains d'entre eux partageront exactement les mêmes propriétés ; les choses pourraient, par exemple, se présenter comme suit :

$$\begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ a_5 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ a_5 \end{array}} \right\} \mathbf{P}_1/\mathbf{P}_2 \text{ (} \rightarrow \beta_1 \text{ ci-dessous)} \qquad \begin{array}{l} a_3 \\ a_7 \\ a_8 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} a_3 \\ a_7 \\ a_8 \end{array}} \right\} \mathbf{P}_1/\overline{\mathbf{P}_2} \text{ (} \rightarrow \beta_2 \text{ ci-dessous)} \\ a_4 \\ a_{10} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} a_4 \\ a_{10} \end{array}} \right\} \overline{\mathbf{P}_1}/\mathbf{P}_2 \text{ (} \rightarrow \beta_3 \text{ ci-dessous)} \qquad \begin{array}{l} a_6 \\ a_9 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} a_6 \\ a_9 \end{array}} \right\} \overline{\mathbf{P}_1}/\overline{\mathbf{P}_2} \text{ (} \rightarrow \beta_4 \text{ ci-dessous)}$$

A ces données, correspondent donc les deux propriétés (on aurait pu procéder dans l'autre sens!) :

$$\mathbf{P}_1 = \{a_1, a_2, a_5, a_3, a_7, a_8\}$$

$$\mathbf{P}_2 = \{a_1, a_2, a_5, a_4, a_{10}\}$$

Remarque 1 : il se pourrait parfaitement qu'aucun élément ne satisfasse une ou plusieurs des possibilités ci-dessus : par exemple a_4 et a_{10} pourraient faire partie des éléments qui sont \mathbf{P}_1 mais pas \mathbf{P}_2 et entrer ainsi dans le deuxième groupe. L'important est qu'il y a au plus quatre groupes (2^2), mais il pourrait y en avoir moins.

Remarque 2. : le nombre des possibilités pour un élément d'un domaine D d'avoir, ou non, l'une ou l'autre de propriétés données, ne dépend que du nombre des propriétés considérées. On peut reformuler les choses ainsi : étant donné un élément quelconque d'un domaine D ,

-une propriété peut être vraie ou fausse de cet élément : $2^1 = 2$ possibilités

-deux propriétés peuvent être toutes les deux vraies de cet élément, ou l'une vraie et l'autre fausse, ou l'une fausse et l'autre vraie ou toutes les deux fausses : $2^2 = 4$ possibilités.

- trois propriétés peuvent être toutes les trois vraies de cet élément, ou les deux premières vraies et la dernière fausse, ou la première vraie, la deuxième fausse et la troisième vraie, ou ... ou toutes les trois fausses de cet élément : $2^3 = 8$ possibilités.

- etc.

Le rapprochement avec les classiques tables de vérité en logique propositionnelle est évident, et l'on sait que pour k lettres de propositions, il y a 2^k "possibilités de vérité" distinctes. De la même manière, pour k propriétés, il y a 2^k possibilités distinctes pour un élément quelconque d'un domaine D d'avoir, ou non, l'une ou l'autre de ces k propriétés.

On définit maintenant quatre classes correspondant aux quatre possibilités, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \{a_1, a_2, a_5\} && \rightarrow \mathbf{P}_1/\mathbf{P}_2, \\ \beta_2 &= \{a_3, a_7, a_8\} && \rightarrow \mathbf{P}_1/\overline{\mathbf{P}_2}, \\ \beta_3 &= \{a_4, a_{10}\} && \rightarrow \overline{\mathbf{P}_1}/\mathbf{P}_2 \text{ et} \\ \beta_4 &= \{a_6, a_9\} && \rightarrow \overline{\mathbf{P}_1}/\overline{\mathbf{P}_2} \end{aligned}$$

On remarque aisément les faits suivants :

- Deux éléments $a_n, a_m \in D$ ($1 \leq n, m \leq 10$) appartiennent à la même classe ssi pour toute propriété, \mathbf{P}_i ($i = 1$ ou $i = 2$ dans cet exemple), $a_n \in \mathbf{P}_i$ ssi $a_m \in \mathbf{P}_i$.

- Il est clair que la relation $\mathbf{Id}_{\mathbf{p}}$ définie sur D , par :
 $\langle a_n, a_m \rangle \in \mathbf{Id}_{\mathbf{p}}$ ssi, pour tout \mathbf{P}_i ($i = 1$ ou $i = 2$), $a_n \in \mathbf{P}_i$ ssi $a_m \in \mathbf{P}_i$
 (autrement dit : $\langle a_n, a_m \rangle \in \mathbf{Id}_{\mathbf{p}}$ ssi a_n et a_m ont exactement les mêmes propriétés) est une relation d'équivalence, et donc à chaque élément $a_n \in D$ correspond sa classe d'équivalence pour $\mathbf{Id}_{\mathbf{p}}$, $|a_n|$, définie par : $|a_n| = \{a_m : \langle a_n, a_m \rangle \in \mathbf{Id}_{\mathbf{p}}\}$.
- Chacune des quatre classes, β_{1-4} est donc une classe d'équivalence relativement à $\mathbf{Id}_{\mathbf{p}}$ et il n'y a pas d'autres classes d'équivalence pour $\mathbf{Id}_{\mathbf{p}}$; par ex. $\beta_2 = |a_3| = |a_7| = |a_8|$.

On construit alors un nouveau domaine $D' = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ (qui est donc l'ensemble des classes d'équivalence pour $\mathbf{Id}_{\mathbf{p}}$), et on interprète dans D' les lettres de prédicat P_1 et P_2 par les propriétés \mathbf{P}'_1 et \mathbf{P}'_2 respectivement, de telle sorte que :

un élément de D' a l'une des deux propriétés \mathbf{P}'_1 ou \mathbf{P}'_2 ssi tous les éléments de D qui appartiennent à cet élément de D' ont la propriété correspondante, \mathbf{P}_1 ou \mathbf{P}_2 , ce qui donne dans notre exemple :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}'_1 &= \{\beta_1, \beta_2\} \\ \mathbf{P}'_2 &= \{\beta_1, \beta_3\}.\end{aligned}$$

De manière plus formelle, en tenant compte des indications ci-dessus, on peut exprimer cela simplement par :

$$A. |a_n| \in \mathbf{P}'_i \text{ ssi } a_n \in \mathbf{P}_i \text{ (} 1 \leq n \leq 10, i = 1 \text{ ou } i = 2\text{)}.$$

Comme il résulte de ce que l'on a vu que : $a_n \in \mathbf{P}_i$ ssi pour tout $a_m \in |a_n|$, $a_m \in \mathbf{P}_i$, on retrouve la clause ci-dessus sous la forme : $|a_n| \in \mathbf{P}'_i$ ssi $a_n \in \mathbf{P}_i$ ssi pour tout $a_m \in |a_n|$, $a_m \in \mathbf{P}_i$.

Remarque : cela revient à considérer que comme, à s'en tenir à nos deux propriétés, on ne peut distinguer deux éléments qui ont exactement les mêmes propriétés, il est loisible de les traiter comme un seul élément : tout ce que l'on peut dire de l'un, on peut le dire de l'autre et réciproquement ; ils sont donc *indiscernables* relativement à ces deux propriétés.

On définit alors, pour une D -interprétation quelconque i des variables d'individu, la D' -interprétation correspondante h des variables d'individu, par :

B. pour tout x , $h(x) = |i(x)|$.

Dans notre exemple, si par, ex., $i(x) = a_8$ alors $h(x) = |i(x)| = |a_8| (= \beta_2)$ et réciproquement.

Il est assez clair que dans ces conditions une formule élémentaire comme P_1x prend la même valeur de vérité dans D pour une interprétation i que celle qu'elle prend dans D' pour l'interprétation correspondante h .

A titre d'illustration, fixons $i(x) = a_6$. Puisque $i(x) = a_6 \notin \mathbf{P}_1$, on a $D \not\models_i P_1x$; mais, par B, $h(x) = |i(x)| = |a_6| (= \beta_4)$ et, par A., puisque $a_6 \notin \mathbf{P}_1$, $|a_6| \notin \mathbf{P}'_1$, d'où également : $D' \not\models_h P_1x$.

De la même manière, une formule comme, par ex., $\exists x(P_1x \wedge \sim P_2x)$ prend la même valeur de vérité dans D pour une interprétation i que celle qu'elle prend dans D' pour l'interprétation correspondante h .

En effet, $D \models_i \exists x(P_1x \wedge \sim P_2x)$ ssi il existe une interprétation i' , x -variante de i telle que $D \models_{i'} P_1x \wedge \sim P_2x$ ssi il existe une interprétation i' , x -variante de i telle que $D \models_{i'} P_1x$ et $D \models_{i'} \sim P_2x$. Or on constate que c'est bien le cas si l'on envisage, par ex., l'interprétation i' qui donne la valeur a_7 à x ($i'(x) = a_7$), puisque $a_7 \in \mathbf{P}_1$ et $a_7 \notin \mathbf{P}_2$, d'où : $D \models_{i'} P_1x$ et $D \models_{i'} \sim P_2x$ et donc etc.

Mais pour l'interprétation correspondant à i' , $h' : V \rightarrow D'$, $h'(x) = |i'(x)| = |a_7| = \beta_2$; or on constate que $\beta_2 \in \mathbf{P}'_1$ et $\beta_2 \notin \mathbf{P}'_2$, d'où $D' \models_{h'} P_1x$ et $D' \models_{h'} \sim P_2x$, donc, etc.

C.5.2 Généralisation.

La construction que l'on vient de faire sur un exemple simple revient en général à ce qui suit.

Soit une formule φ du calcul des prédicats monadiques comportant k lettres de prédicat distinctes, P_1, \dots, P_k . Soit un domaine $D = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ (éventuellement infini), et $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_k$, les D -interprétations des k lettres de prédicat.

Soit la relation $\mathbf{Id}_{\mathbf{p}_j}$ sur D définie par : $\langle a_n, a_m \rangle \in \mathbf{Id}_{\mathbf{p}_j}$ ssi, pour toute propriété \mathbf{P}_j , ($1 \leq j \leq k$), $a_n \in \mathbf{P}_j$ ssi $a_m \in \mathbf{P}_j$. Il est clair que $\mathbf{Id}_{\mathbf{p}_j}$ est une relation d'équivalence sur D et on définit $D' = D/\mathbf{Id}_{\mathbf{p}_j}$ comme étant l'ensemble quotient de

D pour $\mathbf{Id}_{\mathbf{p}_j}$, i.e. l'ensemble des classes d'équivalence pour $\mathbf{Id}_{\mathbf{p}_j}$. Comme on l'a vu ci-dessus, on est assuré que le cardinal de D' est au plus $= 2^k$.

On définit les D' -interprétations, $\mathbf{P}'_1, \dots, \mathbf{P}'_k$ des lettres de prédicat P_1, \dots, P_k dans D' par (on note $|a_n|$ la classe d'équivalence de $a_n \in D$ pour $\mathbf{Id}_{\mathbf{p}_j}$) :

A. $|a_n| \in \mathbf{P}'_j$ ssi $a_n \in \mathbf{P}_j$ ($1 \leq j \leq k$).

On définit, pour une D -interprétation quelconque i des variables d'individu, la D' -interprétation correspondante h des variables d'individu, par :

B. pour tout x , $h(x) = |i(x)|$.

A titre préliminaire, on établit tout de suite quelques résultats.

Dans ce qui suit, on note \mathbf{P}_j ($1 \leq j \leq k$) une formule élémentaire, ou une négation de formule élémentaire dont la lettre de prédicat est l'une des lettres P_1, \dots, P_k .

On montre que, quelle que soit l'interprétation i :

1. $D \models_i \mathbf{P}_j x$ ssi $D' \models_h \mathbf{P}_j x$.
2. $D \models_i \exists x (\mathbf{P}_i x \wedge, \dots, \wedge \mathbf{P}_j x)$ ssi $D' \models_h \exists x (\mathbf{P}_i x \wedge, \dots, \wedge \mathbf{P}_j x)$
3. $D \models_i \forall x (\mathbf{P}_i x \vee, \dots, \vee \mathbf{P}_j x)$ ssi $D' \models_h \forall x (\mathbf{P}_i x \vee, \dots, \vee \mathbf{P}_j x)$.

Pour 1. Soit $\mathbf{P}_i x$, de la forme $P_i x$, alors :

$D \models_i P_i x$ ssi $i(x) \in \mathbf{P}_i$ ssi (en vertu de A.) $|i(x)| \in \mathbf{P}'_i$ ssi (en vertu de B.) $h(x) \in \mathbf{P}'_i$ ssi $D' \models_h P_i x$. Même chose pour $\mathbf{P}_i x$, de la forme $\sim P_i x$

Pour 2. $D \models_i \exists x (\mathbf{P}_i x \wedge, \dots, \wedge \mathbf{P}_j x)$ ssi,

il existe une interprétation i' , x -variante de i , telle que

$D \models_{i'} \mathbf{P}_i x \wedge, \dots, \wedge \mathbf{P}_j x$ ssi $D \models_{i'} \mathbf{P}_i x$ et, ..., et $D \models_{i'} \mathbf{P}_j x$ ssi

- soit $i'(x) \in \mathbf{P}_h$, si \mathbf{P}_h est de la forme $P_h x$,

- soit $i'(x) \notin \mathbf{P}_h$, si $\mathbf{P}_h x$ est de la forme $\sim P_h x$, ssi (en vertu de A.)

- soit $|i'(x)| \in \mathbf{P}'_h$, si $\mathbf{P}_h x$ est de la forme $P_h x$,

- soit $|i'(x)| \notin \mathbf{P}'_h$, si $P_h x$ est de la forme $\sim P_h x$, ssi (en vertu de B.)

- soit $h'(x) \in \mathbf{P}'_h$, si $P_h x$ est de la forme $P_h x$,

- soit $h'(x) \notin \mathbf{P}'_h$, si $P_h x$ est de la forme $\sim P_h x$, ssi

$D \models_{h'} P_i x$ et, \dots , et $D \models_{h'} P_j x$ ssi

$D \models_{h'} P_i x \wedge, \dots, \wedge P_j x$ ssi

$D \models_h \exists x (P_i x \wedge, \dots, \wedge P_j x)$.

1. Même genre de chose que pour 3.

On peut donc soupçonner qu'une formule quelconque du calcul des prédicats monadiques dans laquelle figure k lettres de de prédicat prend exactement la même valeur de vérité dans un domaine D quelconque pour une D -interprétation des lettres de prédicat et une D -interprétation des variables d'individu, que dans le domaine D' construit comme ci-dessus, avec les interprétations correspondantes des lettres de prédicat et des variables d'individu, ce domaine D' ne comptant pas plus 2^k éléments.

Donc en particulier, si une formule est satisfiable dans un domaine D quelconque, elle est également satisfiable dans un domaine ne comptant pas plus de 2^k éléments.

C'est ce que l'on va montrer en montrant que toute formule du calcul des prédicats monadiques est équivalente à une formule qui n'est qu'une combinaison vérifonctionnelle de formules d'une des trois formes précédentes.

Mise en forme pure d'une formule du calcul des prédicats monadiques.

On avait vu comment les règles de passages permettaient de mettre une formule en "forme prénex", tous les quantificateurs étant regroupés en tête d'une formule ne comportant plus de quantificateur. En utilisant les mêmes "règles de passage", on peut, à l'inverse, mettre les formules du calcul des prédicats monadiques en forme "pure" de telle sorte qu'un quantificateur en x (par ex.) ne porte plus que sur une sous-formule dans laquelle figure seulement x libre et que cette sous-formule est ou bien de la forme $P_1 x \vee, \dots, \vee P_n x$ dans le cas d'un quantificateur universel, ou bien de la forme $P_1 x \wedge, \dots, \wedge P_m x$ dans le cas d'un quantificateur existentiel (" $P_i x$ " désignant, comme précédemment, soit une formule élémentaire $P_i x$, soit une négation de formule élémentaire $\sim P_i x$)

La mise en forme pure d'une formule n'est pas aussi simple que la mise en forme prénex lorsque l'on a affaire à des situations dans lesquelles les règles de passage

ne s'appliquent pas directement. Pour comprendre comment procéder, le plus simple est de prendre un exemple et de le commenter :

Soit la formule : $\exists x \forall y [(P_1x \Rightarrow P_2y) \Rightarrow (P_3y \vee P_2z)]$ qui est, notons le, en forme prénexe et comporte une variable libre.

Pour simplifier, on commence par supprimer les implications, ce qui donne :

$\exists x \forall y \{ (P_1x \wedge \sim P_2y) \vee (P_3y \vee P_2z) \}$; comme les deux membres de la disjonction comportent la variable y liée par le quantificateur universel, on ne peut entrer celui-ci en tête de chacun des disjoints (pas de distributivité de \forall sur \vee). C'est là un cas qui rend la mise en forme pure un peu plus compliquée que la mise en forme prénexe. Pour contourner cette difficulté, on met la formule entre accolades en forme normale conjonctive, ce qui donne :

$\exists x \forall y \{ [P_1x \vee (P_3y \vee P_2z)] \wedge [\sim P_2y \vee (P_3y \vee P_2z)] \}$; on peut alors utiliser la distributivité de \forall sur \wedge et entrer le quantificateur en y en tête de chacun des conjoints, ce qui donne :

$\exists x \{ \forall y [P_1x \vee (P_3y \vee P_2z)] \wedge \forall y [\sim P_2y \vee (P_3y \vee P_2z)] \}$; puis, comme y ne figure que dans le deuxième membre de la disjonction de gauche, on peut entrer le quantificateur en y en tête du disjoint comportant y libre, ce qui donne :

$\exists x \{ [P_1x \vee \forall y (P_3y \vee P_2z)] \wedge \forall y [\sim P_2y \vee (P_3y \vee P_2z)] \}$; de la même manière, en modifiant le parenthésage dans la disjonction de droite, on peut entrer le quantificateur en y à droite, tout comme on peut le faire à gauche (et on supprime les parenthèses), ce qui donne :

$\exists x \{ [P_1x \vee \forall y P_3y \vee P_2z] \wedge [\forall y (\sim P_2y \vee P_3y) \vee P_2z] \}$; maintenant les choses sont plus simples pour le quantificateur existentiel en x puisqu'il porte sur une conjonction dont l'un des deux membres ne comporte pas la variable x libre, ce qui donne :

$\exists x [P_1x \vee \forall y P_3y \vee P_2z] \wedge [\forall y (\sim P_2y \vee P_3y) \vee P_2z]$; on peut maintenant entrer le quantificateur existentiel en x en tête du premier disjoint à gauche, ce qui donne pour finir :

$$[\exists x P_1x \vee \forall y P_3y \vee P_2z] \wedge [\forall y (\sim P_2y \vee P_3y) \vee P_2z]$$

forme "purifiée" de la formule dont on était parti; on s'assure facilement que cette

dernière formule est équivalente à la première et on se convainc que, par cette procédure, toute formule du calcul des prédicats monadiques peut se mettre sous une forme "pure".

La forme pure d'une formule est donc, comme on le voit dans l'exemple ci-dessus, une "combinaison" vérifonctionnelle de formules de l'une des trois formes évoquées plus haut dans laquelle, outre les formules élémentaires ou négations de formule élémentaire, un quantificateur universel en x , par ex., ne porte que sur une disjonction (éventuellement dégénérée et ne comptant qu'un seul membre) de formules élémentaires ou de négations de formules élémentaires comportant toutes la variable x , et dans laquelle un quantificateur existentiel en x , par ex., ne porte que sur une conjonction (éventuellement dégénérée et ne comptant qu'un seul membre) de formules élémentaires ou de négations de formules élémentaires comportant toutes la variable x .

Or on a montré que tous ces constituants d'une forme pure prenaient la même valeur de vérité dans un domaine D quelconque pour une D -interprétation des lettres de prédicats et une D -interprétation des variables d'individu, que celle qu'ils prennent dans le domaine D' construit à partir de D comme précédemment avec les interprétations correspondantes.

Il en résulte que toute combinaison vérifonctionnelle de ces mêmes constituants prend la même valeur de vérité dans un domaine D quelconque pour une D -interprétation des lettres de prédicats et une D -interprétation des variables d'individu, que dans le domaine D' construit à partir de D comme précédemment avec les interprétations correspondantes.

Or la forme pure d'une formule φ quelconque est équivalente à cette dernière, et ce que l'on vient de dire vaut donc pour une formule quelconque du calcul des prédicats monadiques, i.e. :

Une formule φ du calcul des prédicats monadiques prend la même valeur de vérité dans un domaine D quelconque pour une D -interprétation des lettres de prédicats et une D -interprétation des variables d'individu, que dans le domaine D' construit à partir de D comme précédemment avec les interprétations correspondantes.

Comme D' ne compte pas plus de 2^k éléments (k étant le nombre de lettres de prédicat figurant dans φ) si φ est satisfiable dans un domaine quelconque, φ est satisfiable dans un domaine ne comptant pas plus de 2^k éléments. Or k est nécessairement fini, puisqu'une formule est une suite finie de symboles, donc 2^k est fini.

On a donc montré qu'aucune formule du calcul des prédicats monadiques ne permet d'« exprimer » qu'un domaine est infini, au sens où, si elle était vraie dans un

domaine, ce domaine serait nécessairement infini.

Remarque additionnelle.

Il résulte de ce qui précède une intéressante conséquence concernant le problème de la décision. Soit φ une formule du calcul des prédicats monadiques dont on veut savoir si elle est valide. En vertu de ce qui a été vu il y a longtemps, φ est valide ssi $\sim\varphi$ n'est pas satisfiable. Si $\sim\varphi$ est satisfiable, $\sim\varphi$ est satisfiable dans un domaine ne comptant pas plus 2^k éléments (k étant le nombre de lettres de prédicat figurant dans φ), d'où par contraposition : si $\sim\varphi$ n'est pas satisfiable dans un domaine comptant au plus 2^k éléments, $\sim\varphi$ n'est pas satisfiable dans un domaine quelconque et donc φ est valide.

Or pour s'assurer de la satisfiabilité de $\sim\varphi$ dans un domaine comptant au plus 2^k éléments, il suffit, puisque 2^k est fini, de transcrire les quantificateurs universels en conjonctions et les quantificateurs existentiels en disjonction, pour chaque domaine comptant 1, puis 2, puis etc., jusqu'à, au maximum, 2^k éléments et de calculer, à chaque fois, comme en propositionnel, la valeur de vérité des formules obtenues. On obtient ainsi, en un nombre fini d'étapes, la réponse, par oui, ou par non, à la question de la validité de φ .

Table des matières

1	Syntaxe, sémantique ; lois logiques	3
1.1	Vocabulaire, grammaire du langage \mathcal{L} pour le calcul des prédicats . . .	3
1.2	Interprétation, évaluation	7
1.2.1	Remarques préliminaires.	7
1.2.2	Ensemble des propriétés et relations relativement à un domaine D	8
1.2.3	Définition de “être vrai dans un domaine D pour une interprétation i des variables d’individu”.	9
1.3	Satisfiabilité, validité.	13
1.3.1	Définitions	13
1.3.2	Relations entre ces propriétés	14
1.4	Quelques lois logiques.	15
1.4.1	Règles de passage et mise en forme prénexe.	15
1.4.2	Propriétés formelles des relations dyadiques.	17
2	Arbres et séquents.	23
2.1	Principe général de la méthode des arbres.	23
2.1.1	Exemples d’arbre	24
2.1.2	Règles pour la construction d’un arbre.	33
2.1.3	Quelques points de vocabulaire.	35
2.2	Complétude de la méthode des arbres	36
2.2.1	Langage avec constantes relativement à un domaine D	37
2.2.2	Ensemble de vérité descendant, ensemble de vérité, relativement à un domaine D	39
2.2.3	Problème de la décision	46
2.3	Calcul des séquents en premier ordre	48
2.3.1	Règles d’inférence nouvelles	48
2.3.2	Exemples de démonstration dans le calcul des séquents.	51

3	Calcul des prédicats avec égalité.	55
3.1	Embarras logico-philosophiques	55
3.2	Lois fondamentales de l'identité	57
3.3	Ce que l'on peut "dire" avec l'identité	60
3.3.1	Arbres pour les formules avec identité	69
A	Quelques notions élémentaires de théorie des ensembles	73
A.1	Ensemble des parties d'un ensemble.	73
A.2	Produit cartésien	74
A.3	Fonction	75
B	Pourquoi et comment fermer un arbre rapidement ?	77
B.1	Transitivité + symétrie implique réflexivité (simple)	77
B.2	Transitivité + symétrie + sérialité implique réflexivité totale	83
B.3	Euclidien + réflexivité (totale) implique symétrie	84
B.4	Exemple d'inférence asylogistique	86
C	Formules infini satisfiables	89
C.1	La formule, \mathfrak{D} , de Dedekind	89
C.2	La formule \mathfrak{G}	94
C.3	La formule \mathfrak{H}	97
C.4	Relations entre ces formules	100
C.5	Remarque sur le calcul des prédicats monadiques et l'infini	103
C.5.1	Un exemple.	104
C.5.2	Généralisation.	107