Introduction à la logique L2

03. Syntaxe de la logique quantificationnelle (LQ)

Michael Murez

12/02/2019

Questions pratiques

- Diapos en ligne sur ifac ; mot de passe : gottlob
- TDs:
- Groupe 2 13H30 – 15H
- Groupe 1 15h - 16h30

Buts de la séance

- Syntaxe de la logique quantificationnelle (LQ).
- Première approche de la sémantique de LQ.

Quantification multiple (rappel)

- Tout individu aime quelqu'un : $\forall x \exists y\ Axy$
- Tout individu est aimé de quelqu'un : $\forall x \exists y\ Ayx$
- Il y a un individu qui aime tout le monde : $\exists x \forall y\ Axy$
- Il y a un individu que tout le monde aime : $\exists x \forall y\ Ayx$

Quantification restreinte (rappel)

- Tout Nantais est sympa.
- $\forall x\,(Nx \rightarrow Sx)$
- Attention : ne pas confondre avec $\forall x\,(Nx \wedge Sx)$.
- Cela voudrait dire que tout le monde est à la fois Nantais et sympa (ce qui est incompatible avec l'existence de Guingampais pas sympas, par exemple).

- Toutes les licornes sont bleues.
- Est-ce vrai ou faux, d'après cette conception du quantificateur universel ?
- (On y reviendra quand on aura une sémantique pour LQ.)

Quantification restreinte (rappel)

- Certains Nantais sont sympas.
- Il existe au moins un individu x tel que x est Nantais et x sympa
- $\exists x\ (Nx \wedge Sx)$.
- (Remarque : on peut considérer le fait que dire « certains sont…» suggère qu'il y en a plus d'un comme une *implicature pragmatique,* ne relevant pas de la logique *stricto sensu*.)

Exemple

- Tous les Nantais sont sympas.
- Certains philosophes sont Nantais.
- Donc, certains philosophes sont sympas.

- $\forall x\ (Nx \rightarrow Sx)$
- $\exists x\ (Px \wedge Nx)$
- $\exists x\ (Px \wedge Sx)$

Nul/aucun F n’est G.

- Nul Nantais n’est sympa.

Nul/aucun F n'est G.

- Nul Nantais n'est sympa.
- $\forall x\,(Nx \rightarrow \neg Sx)$
- $\neg \exists x\,(Nx \wedge Sx)$

Quantification restreinte et langage naturel

- Comme le montre la manière de traduire la quantification restreinte, LQ est très différente du langage naturel.
- Cela pose une question philosophique : est-ce que LQ révèle la forme logique cachée des énoncés du langage naturel ?
- Ou est-ce simplement un langage qui fonctionne différemment, tout en permettant de modéliser certaines propriétés logiques des énoncés ?
- (Il y a une autre manière de symboliser logiquement la quantification restreinte et qui permet de moins s‘écarter du langage naturel.)

Syntaxe de LQ

Vocabulaire primitif de LQ

- Les connecteurs propositionnels : ¬, ∧, ∨, →, ↔
- Les parenthèses : (,), [,]
- Les symboles de quantificateurs : ∀, ∃
- Les constantes d'individus : a, b, c, …
- Les variables d'individus : x, y, z, …
- Les symboles de prédicats, avec une arité finie spécifique : F^1, G^2, H^3…
- On écrira souvent « Fab » quand stricto sensu il faudrait écrire « F^2ab»

Formules atomiques de LQ (rappel)

- Un *terme singulier* est une constante ou une variable.
- Pour tout n, une *formule atomique* est de la forme $P^n t_1 \ldots t_n$, où chaque t est un terme singulier, et P^n est un symbole de prédicat d'arité n.

Syntaxe de LQ : règles de formation

- Règle 1 : Les formules atomiques sont des formules (sous-entendu : bien formées) de LQ.

Syntaxe de LQ : règles de formation

- Règle 1 : Les formules atomiques sont des formules (sous-entendu : bien formées) de LQ.
- Règle 2 : Si A est une formule de LQ, alors $\neg A$ est une formule de LQ.

Syntaxe de LQ : règles de formation

- Règle 1 : Les formules atomiques sont des formules de LQ.
- Règle 2 : Si A est une formule de LQ, alors $\neg A$ est une formule de LQ.
- Règle 3 : Si A et B sont des formules de LQ, alors les expressions suivantes sont des formules de LQ :
- $(A \wedge B)$
- $(A \vee B)$
- $(A \rightarrow B)$
- $(A \leftrightarrow B)$

Syntaxe de LQ : règles de formation

- Règle 1 : Les formules atomiques sont des formules de LQ.
- Règle 2 : Si A est une formule de LQ, alors $\neg A$ est une formule de LQ.
- Règle 3 : Si A et B sont des formules de LQ, alors les expressions suivantes sont des formules de LQ :
- $(A \wedge B)$
- $(A \vee B)$
- $(A \rightarrow B)$
- $(A \leftrightarrow B)$
- Règle 4 : Si A est une formule, et v est une variable d'individu, alors $\forall v\, A$ est une formule, et $\exists v\, A$ est une formule.

Syntaxe de LQ : règles de formation

- Règle 1 : Les formules atomiques sont des formules (bien formées) de LQ.
- Règle 2 : Si A est une formule de LQ, alors $\neg A$ est une formule de LQ.
- Règle 3 : Si A et B sont des formules de LQ, alors les expressions suivantes sont des formules de LQ :
- $(A \wedge B)$
- $(A \vee B)$
- $(A \rightarrow B)$
- $(A \leftrightarrow B)$
- Règle 4 : Si A est une formule, et v est une variable d'individu, alors $\forall v\, A$ est une formule, et $\exists v\, A$ est une formule.
- Règle 5 : Une expression est une formule de LQ ssi elle peut être obtenue par l'application d'une ou plusieurs de ces règles un nombre fini de fois.

Exemple de formules de LQ (d'après la définition)

- Px
- $\forall y\ Py$
- $\neg\neg Px$
- $\exists x\ Px$
- $\exists x\ Pz$
- $(Px \lor Qy)$
- $(\exists x\ Pz \lor \forall y\ Py)$
- $\forall x\ Rxa$
- $\forall x \exists y \forall z\ [Px \rightarrow (Qy \leftrightarrow Rz)]$

Expressions qui ne sont pas des formules d'après la définition

- (Px)
- $(\forall y\ Py)$
- $(\neg\neg Px)$
- $\exists Px$
- $(P \wedge Q)x$
- $\forall P(Px \vee Py)$
- $\forall \exists yz\ (Py \leftrightarrow Ry)$

Rappel : convention

- Par convention, on s’autorise à omettre les parenthèses extérieures, par exemple :
- $\exists x\ Px \vee \forall y\ Py$

Portée des quantificateurs & liage

- La *portée* d'un quantificateur est la plus petite formule complète qui le suit.
- (Remarque : syntaxiquement, un quantificateur est un connecteur unaire ; c'est exactement comme la portée de la négation.)
- Un quantificateur suivi par une variable *lie* toutes les occurrences libres de la variable dans sa portée.
- Par convention, on ne compte pas x dans « $\exists$ x » ou dans « $\forall$ x » comme une occurrence de x – c'est simplement une sorte d'étiquette qui aide à savoir quelle(s) variable(s) sont liées par le quantificateur. « $\exists$ x » lie des occurrences de x, et non de y.

Portée des quantificateurs & liage

- $\exists \underline{x} (P\underline{x} \vee Q\underline{x})$
- Toutes les occurrences de la variable sont liées par « $\exists x$ »

- $(\exists \underline{x}\ P\underline{x} \vee Qx)$
- Seule la première occurrence est liée par « $\exists x$ », l'autre occurrence est libre.

- On peut écrire des formules comme :
- $\exists x\ Pa$
- $\forall y\ Px$
- Ici, le quantificateur ne lie aucune variable : c'est comme si le quantificateur n'était pas là.

Portée des quantificateurs & liage

- $\exists x\ (\forall x\ Rxa \rightarrow Rxb)$

Portée des quantificateurs & liage

- $\exists x\ (\forall x\ Rxa \rightarrow Rxb)$
- $\exists x$ ne lie que les occurrences **libres** de *x* dans sa portée, pas celle qui est déjà liée par un autre quantificateur.

- On pourrait clarifier en écrivant plutôt :
- $\exists x\ (\forall y\ Rya \rightarrow Rxb)$

Portée des quantificateurs & liage

- $\neg \exists x \; \exists y \, (\forall z \, (\exists w \, Rzw \rightarrow Ryz) \wedge Rxy)$
-

Quantificateur	Portée
$\exists w$	Rzw
$\forall z$	$\exists w \, Rzw \rightarrow Ryz$
$\exists y$	$\forall z \, (\exists w \, Rzw \rightarrow Ryz) \wedge Rxy$
$\exists x$	$\exists y \, (\forall z \, (\exists w \, Rzw \rightarrow Ryz) \wedge Rxy)$

Portée des quantificateurs & liage

- $\exists x\, [\exists x\, (Bx \lor Lxa) \rightarrow (Bx \land Lxb)]$

Portée des quantificateurs & liage

- $\exists x\, [\exists x\, (Bx \vee Lxa) \rightarrow (Bx \wedge Lxb)]$

Quantificateur	Portée
$\exists x$	$Bx \vee Lxa$
$\exists x$	$\exists x\, (Bx \vee Lxa) \rightarrow (Bx \wedge Lxb)$

Portée des quantificateurs & liage

- $\exists x\ \forall y\ Lxy$
- $\exists y\ \forall x\ Lyx$
- Ces formules sont strictement équivalentes.
- Les variables *x* et *y* n'ont pas de différences de signification intrinsèque : elles ne servent qu'à indiquer quelles positions sont liées par quels quantificateurs.

- $\exists\ .\ \forall\ .\ L\ .\ .$

L’importance philosophique des ambiguïtés de portée (1)

- Tout art et toute investigation, et pareillement toute action et tout choix tendent vers quelque bien, à ce qu'il semble. Aussi a-t-on déclaré avec raison que le Bien est ce à quoi toutes choses tendent. (Aristote, *Ethique à Nicomaque*, livre I)

L’importance philosophique des ambiguïtés de portée (1)

- Tout art et toute investigation, et pareillement toute action et tout choix tendent vers quelque bien, à ce qu'il semble. Aussi a-t-on déclaré avec raison que le Bien est ce à quoi toutes choses tendent. (Aristote, *Ethique à Nicomaque*, livre I)
- $\forall x\,[Ax \rightarrow \exists y\,(By \wedge Txy)]$
- $\exists y\,[By \wedge \forall x\,(Ax \rightarrow Txy)]$

Merci pour votre aimable attention !